This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

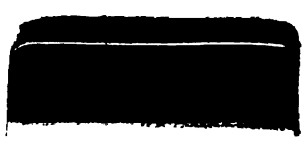
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 492845

Digitized by Google



Digitized by Google

Geographische Trigonometrie,

oder die

Auflösung der geradlinigen, sphärischen und sphäroidischen Dreiecke,

mit ihrer

Anwendung bei größern geodätischen Vermessungen und der Projection der Charten, sowohl theoretisch als auch rein praktisch dargestellt und mit einem Anhange

über

Winkelmeßinstrumente

begleitet

von

J. P. W. Stein,

Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Trier, Mitglied der Gesellschaft nützlicher Untersuchungen daselbst und vormaligem ingénieur géographe in französischen Diensten.

Mit acht Steintafeln.

Mainz, 1825.

Bei Florian Kupferberg.

Digitized by Google

QA
371

Digitized by Google

Library copy
Perella
C-22-24
9749

Vorwort.

In dem gegenwärtigen Werke habe ich diejenigen trigonometrischen Kenntnisse darstellen wollen, welche man von dem, mit der Triangulation und dem Entwurfe der Charte eines großen Landes beauftragten, Geodäten fordert. Das Astronomische, welches sich, streng genommen, auf die Bestimmung der geographischen Breite eines einzigen Punktes und des Azimuthes einer durch diesen Punkt gehenden geodätischen Linie beschränkt, ist nicht mit einbegriffen. Uebrigens wird man hier alles finden, was die Bestimmung der Gestalt der Erde, die Messung und Berechnung aller Theile eines trigonometrischen Netzes, die Bestimmung der geographischen Längen und Breiten seiner Eckpunkte, die Verzeichnung der Charten nach den vorzüglichsten Projections-Arten und die Höhenmessung oder die Construction der Profile erheischt.

Da man nach und nach die Erde als eine Ebene, dann als eine Kugel und endlich als ein durch Umdrehung erzeugtes Ellipsoid betrachtet hat *), und noch wirklich die eine oder die andere Hypothese befolgt, je nachdem der Theil der Erde-Oberfläche, von welchem es sich handelt, minder oder mehr ausgedehnt ist, so müssen die geometrischen Figuren oder Netze, welche wir uns auf der Erde gezeichnet denken, bald ebene, bald sphärische, bald sphäroidische seyn: ihre Berechnung erfordert also die ebene, die sphärische und die sphäroidische Trigonometrie, deren Gesammtheit ich aus diesem Grunde mit dem Titel einer geographischen Trigonometrie belegt habe.

*) Selbst die letztere Unterstellung stimmt nicht genau mit der Wirklichkeit überein, wie die neueren Messungen von Meridianbogen immer mehr beweisen; doch sind die Abweichungen noch bei weitem nicht hinlänglich erforscht, um in Rechnung gebracht zu werden.

Digitized by Google

In dem theoretischen Theile habe ich mich der Deutlichkeit, der Kürze und besonders einer solchen Vollständigkeit beflissen, daß zur Ergänzung dessen, was ich vortragen wollte, möglichst wenige Citate nothwendig würden, in welcher Absicht ich auch zu Anfang des ersten Theiles mehrere, obwohl sehr bekannte Sätze und Formeln wiederholt habe. Der praktische Theil, nämlich der dritte, ist mit steter Rücksicht auf den bloßen Praktiker abgefaßt. Aufsuchen eines Logarithmen, die Kenntniß der ersten Anfangsgründe der Arithmetik und der Buchstabenrechnung ist alles, was zum Verstehen desselben nothwendig ist.

Es dürfte wohl nicht unnütz seyn, hier von meinem Gange so wie auch von der Eintheilung, welche ich befolgt habe, etwas Näheres zu sagen; allein ohne zu große Weitläufigkeit müßte ich fürchten, dem Unkundigen nicht verständlich zu werden und dem Sache-Kenner wird die Inhalts-Anzeige, worauf ich hier, sowohl in Betreff des Hauptwerkes als auch des Anhanges, lediglich verweise, eine hinlängliche Uebersicht gestatten.

Möge man das Neue, was ich gegeben habe, mit Sorgfalt und Unbefangenheit, wie ich es nun seit mehreren Jahren gethan habe, prüfen und in meiner Darstellung des schon Bekannten, die Bemühung, auf dem natürlichsten und einfachsten Wege zu den Resultaten zu gelangen, nicht verkennen!

Bemerkungen über diese Schrift und Beiträge zu deren Vervollständigung werde ich dankbar annehmen, benützen und mit ausdrücklicher Anführung ihrer Urheber bekannt werden lassen. Auf diesem Wege könnte das gegenwärtige Buch wenigstens die Grundlage zu einem wahrhaft nützlichen Werke werden und ich würde mich dadurch für meine Arbeit hinlänglich belohnt finden.

Trier im Juli 1824.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalts-Anzeige.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Wiederholung mehrerer Sätze und Formeln aus der Trigonometrie, der Lehre von den Reihen und der Differentialrechnung.

	Pag.	§.
Beziehungen der trigonometrischen Linien untereinander.		
Formeln für sin (a ± b), cos (a ± b)	1	1
Formeln um die Summe zweier sinus oder zweier cosinus in ein Product solcher Größen zu verwandeln	1	2
Die zweite, dritte und vierte Potenz eines sinus oder cosinus durch sinus und cosinus des vielfachen Bogens auszudrücken	2	3
Einige Formeln für Tangenten	2	4
Allgemeine Methoden der Differential- und Integral-Rechnung zur Entwickelung der Functionen in Reihen.		
Formel von Taylor	3	5
Entwickelung der f (x) in eine nach x geordnete Reihe	3	6
Aus der Gleichung u = a + ε f (u), u in eine nach ε geordnete Reihe zu entwickeln	4	7
Entwickelung einer f (x) durch Integriren, wenn man den ersten Differentialcoefizienten derselben entwickeln kann	4	8
Anwendung der vorhergehenden Formeln.		
Entwickelung von $(x + a)^m$	4	9
Entwickelung von log (x + 1); Werth des Modüls k	5	10
Entwickelung von sin x, cos x und tang x	5	11
Entwickelung von bog (tang = x)	5	12
Entwickelung von a^x und e^x wo e die Basis der Neper'schen Logarithmen ist	5	13
Cos x und sin x durch Exponentialgrößen ausgedrückt	6	14
Einen Bogen, welcher in Graden, Minuten und Secunden gegeben ist, in Theilen des Radius auszudrücken, und umgekehrt	6	15

(*)

Digitized by Google

	Pag.	§.
Auffindung des Krümmungskreises.		
Definition und Eigenschaften desselben, welche aus der Differentialrechnung hieher entlehnt werden	6	16
Formeln um den Radius und die Coordinaten des Centrums des Krümmungskreises zu berechnen	7	17
Wie mittelst der Differential-Rechnung kleine Veränderungen in den Werthen einer Function gefunden werden können	7	18
Ueber den Gebrauch der Logarithmen- und Sinus-Tafeln.		
Warum in jedem Logarithmen ein Irrthum von 0,0000001 zu befürchten sei	8	19
Wie genau kann man aus den Tafeln eine Zahl durch ihren Logarithmen finden?	8	20
Welche log. tab. trigonometrischer Linien um 10 zu groß sind	10	21
Kann man den log. sinus eines Bogens in den Tafeln immer mit sieben richtigen Dezimalstellen finden?	10	22
Wie genau kann man einen Bogen durch seinen log. sinus finden?	12	23
Wie man sich in den Rechnungen mit trigonometrischen Linien hilft, wenn der Gebrauch der Tafeln unsicher wird	13	24
Wie die trigonometrischen Linien solcher Bogen, welche größer als 90° sind, aus den Tafeln gefunden werden	14	25
Zweites Kapitel.		
Die Auflösung der geradlinigen Dreiecke im Allgemeinen und in besondern Fällen.		
Formeln zur Auflösung der geradlinigen Dreiecke im Allgemeinen.		
Die Seiten eines Dreieckes sind mit den sinus der gegenüberstehenden Winkel in Proportion	14	26
Beweis der Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	14	27
Beweis der Formel $b = c \cos A + a \cos c$	14	28
Ein Dreieck aufzulösen worin zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind	14	29
Numerische Anwendung hiervon	15	30
Die beiden in (29) unbekannten Winkel ohne vorläufige Berechnung der unbekannten Seite zu finden	16	31
Wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind, das Uebrige zu finden	16	32
Wenn zwei Seiten und ein Winkel, welcher der einen von beiden Seiten gegenübersteht, gegeben sind, das Dreieck aufzulösen	17	33
Durch drei Seiten die drei Winkel zu bestimmen	17	34
Numerische Anwendung hiervon	17	35
Den Inhalt eines Dreieckes zu berechnen	18	36
Anwendung der vorhergehenden Formeln in besondern Fällen.		
Wenn ein Winkel im Dreiecke sehr spitzig ist	18	37
Fortsetzung hiervon	19	38

Digitized by Google

	Pag.	§.
Numerisches Beispiel	20	39
Wenn ein Winkel im Dreiecke sehr stumpf ist, die gegenüberliegende Seite zu finden	21	40
Numerisches Beispiel hiervon	22	41
Im Falle von (40) einen der beiden andern Winkel direct zu berechnen	22	42
Den im vorigen §. gesuchten Winkel in eine Reihe zu entwickeln	23	43
Anwendung hiervon in Zahlen	24	44
Anwendung (von 42)	24	45
Ein Viereck durch die Kenntniß zweier Seiten, ihres eingeschlossenen Winkels und der zwei Winkel, welche die beiden anderen Seiten mit der durch ihren Durchschnittspunct gehenden Diagonale bilden, zu bestimmen	24	46

Drittes Kapitel.

Die Auflösung der sphärischen Dreiecke im Allgemeinen und in besondern Fällen.

Eigenschaften und Auflösung der sphärischen Dreiecke im Allgemeinen.

	Pag.	§.
Von welchen sphärischen Dreiecken hier die Rede sei, und wie der Radius der Kugel hier in Rechnung gebracht werde	25	47
Die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes betragen weniger als 360°	25	48
Bestimmung des Polardreieckes	26	49
Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreieckes beträgt mehr als 180°; sphärischer Ueberschuß	26	50
Reciprocität des Polardreieckes	26	51
Grundformeln zur Auflösung der sphärischen Dreiecke	27	51 bis 52
Die sinus der Seiten verhalten sich wie die sinus der gegenüberstehenden Winkel	27	53
Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn die beiden Catheten gegeben sind	28	54
Wenn die Hypothenuse und eine Cathete gegeben sind	28	55
Wenn die Hypothenuse und ein Winkel gegeben sind	28	56
Wenn eine Cathete und der gegenüberstehende Winkel gegeben sind	29	57
Wenn eine Cathete und der anliegende Winkel gegeben sind	29	58
Wenn die beiden Winkel gegeben sind	29	59
Wenn in einem schiefwinkeligen Dreiecke zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, das Dreieck aufzulösen	30	60
Wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind	32	61
Wenn zwei Seiten und ein Winkel, welcher der einen von beiden Seiten gegenübersteht, gegeben sind	32	62
Wenn zwei Winkel und die Seite, welche dem einen von beiden Winkeln gegenübersteht, gegeben sind	33	63
Aus den drei Seiten die drei Winkel zu finden	33	64
Aus den drei Winkeln die drei Seiten zu finden	34	65
Den Inhalt des sphärischen Dreieckes zu finden	34	66

Digitized by Google

	Pag.	§.
Auflösung der sphärischen Dreiecke in besondern Fällen.		
Bestimmung des sphärischen Ueberschusses in einem sphärischen Dreiecke, dessen Seiten gegen den Radius der Kugel klein sind	35	67
Formel um den sphärischen Ueberschuß so zu berechnen, daß nur Glieder sechster Ordnung daran fehlen	36	67 bis
Die Regel von Legendre, wodurch die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, dessen Seiten in Ansehung des Radius der Kugel sehr klein sind, auf die eines geradlinigen zurückgeführt wird	38	68
Beweis, daß die Regel von Legendre auf alle Dreiecke, deren Seiten nicht über 2°, 55′ ausmachen, anwendbar sei, wenn man einen Irrthum von 0″, 05 in den Winkeln nicht achtet	40	69
Beweis, daß man jedes sphärische Dreieck, dessen Seiten nicht mehr als 4′, 9″ betragen, als ein vollkommen geradliniges ansehen dürfe, ohne einen Irrthum von 0″, 05 in den Winkeln befürchten zu können	42	70
Auflösung eines sphärischen Dreieckes, wovon zwei Seiten sehr wenig von 90° abweichen, wenn die drei Seiten des Dreieckes bekannt sind	43	71
Beweis, daß die Formel des vorhergehenden §., so lange als keine der beiden Seiten um mehr als 1°, 24′ von 90° abweicht, keinen Irrthum von 0″, 05 in den gesuchten Winkeln geben könne	44	72
Auflösung eines sphärischen Dreieckes, wovon eine Seite sehr klein ist, die beiden andern aber willkürlich groß seyn können, wenn die kleine Seite, der Winkel, welchen sie mit einer der beiden andern macht, und diese letztere selbst, gegeben sind . .	45	73
Auflösung des nämlichen Dreieckes, wenn die beiden größeren Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel bekannt sind	49	74
Die Formeln aus (73) durch Differentialrechnung entwickelt	49	75
So lange die kleine Seite weniger als 22′ beträgt, kann man in den Formeln (73), wenn die größern Seiten nicht bedeutend von 45° abweichen, alle Glieder dritter Ordnung weglassen, ohne einen Irrthum von 0″, 05 zu begehen; ebenso können selbst die Glieder zweiter Ordnung weggelassen werden, wenn die kleinere Seite weniger als 2′ beträgt	51	75 bis
Viertes Kapitel.		
Einige Lehnsätze aus der Astronomie und der Geographie.		
Die Erde ist rund. — Ohngefährer Werth ihres Radius. — Erklärung von Erdfläche	52	76
Erklärung der Namen: Erdachse, Erdpole, Nord- und Südpol	53	77
Erklärung der Namen: Scheinbarer Horizont, eingebildeter Horizont, wahrer Horizont, Verticale	53	78
Erklärung der Ausdrücke: Himmels-Kugel, Himmels-Equator, Himmels-Meridian, Himmels-Parallelkreis, Himmels-Pole	53	79
Erklärung der Ausdrücke: Zenith eines Punktes, Erde-Equator, Erde-Meridian, Erde-Parallelkreis	53	80

Digitized by Google

	Pag.	§.
Geographiſche Breite eines Punktes, nördliche, ſüdliche Breite, Polhöhe; ſie iſt der Breite gleich	54	81
Alle Punkte, welche auf dem nämlichen Parallelkreis liegen, haben einerlei Breite	54	82
Geographiſche Länge, öſtliche, weſtliche Länge. Alle Punkte, welche auf dem nämlichen Meridiane liegen, haben einerlei Länge, von welchem anderen Punkte her dieſe auch gezählt werde	54	83
Erklärung einer geodätiſchen Linie. Azimuth derſelben	55	84

Zweiter Theil.

Erſtes Kapitel.

Von den geodätiſchen Operationen überhaupt und von der Verrichtung derſelben in der Unterſtellung, daß die Erde vollkommen ſphäriſch ſei.

Von der unmittelbaren Meſſung der geodätiſchen Linien und ihrer Winkel.

Was ſind die Erdachſe, die Pole, die Verticale, der Equator, der Meridian, der Parallelkreis, die geographiſche Breite, die Länge, und die geodätiſche Linie in der Hypotheſe, die Erde ſei ſphäriſch	56	85
Allgemeiner Begriff von dem Zwecke geodätiſcher Operationen; Erklärung von Charte und Profil	57	86
Was und wozu ein trigonometriſches Netz ſei	57	87
Beſchreibung der Meſſung der Baſis von Melun, als Beiſpiel des genaueſten Verfahrens hierbei, und Anleitung zur Meſſung einer Baſis im Allgemeinen	58	88
Beſchreibung eines andern Verfahrens beim Meſſen einer Baſis	65	88 bis
Unmittelbare Meſſung eines Winkels und Reduction deſſelben auf den Horizont und auf das Centrum der Stellung	67	89

Auflöſung der Dreiecke eines trigonometriſchen Netzes.

Warum die Dreiecke nach der Regel von Legendre aufgelöst werden können; wie man die Summe der Irrthümer in den Beobachtungen erkenne und nach welchem Syſtem dieſe Irrthümer auf die einzelnen Winkel vertheilt und dann getilgt werden	69	90
Numeriſches Beiſpiel von der Auflöſung eines Netz-Dreieckes	70	91

Von der Beſtimmung der geographiſchen Längen und Breiten der Puncte eines trigonometriſchen Netzes, immer in der Unterſtellung daß die Erde ſphäriſch ſei.

Die Länge und Breite des erſten Punktes und der Azimuth einer Linie, die durch dieſen Punct geht, werden aſtronomiſch beſtimmt; unſere Aufgabe iſt, die Lagen der übrigen Puncte aus den durch die Aſtronomie gegebenen Dingen zu finden	73	92

Digitized by Google

	Pag.	§.
Wenn die Breite eines Punktes A und der Azimuth einer kleinen geodätischen Linie AB in A gegeben sind; die Breite von B, den Längenunterschied zwischen A und B und den Azimuth der Linie AB im Punkte B zu bestimmen. Hierzu drei Formeln und die Angabe, in welchem Falle man in diesen Formeln die Glieder dritter Ordnung weglassen kann	73	93
Ein numerisches Beispiel von der Anwendung des Vorhergehenden	74	93 bis
Wenn die Breiten zweier nahen Puncte A, B und ihr Längenunterschied gegeben sind, die Entfernung AB zu bestimmen	76	94
Wie die Aufgaben in (93) und (94), im Falle wo die geodätischen Linien nicht klein sind, aufgelöst werden können	76	95
Bestimmung des Radius der Erde.		
Der Radius der Erde kann gefunden werden, wenn man einen Meridianbogen von einer bestimmten Anzahl Grade gemessen hat	77	96
Erklärungen der Ausdrücke, Perpendiculäre eines Punctes, Entfernung eines Punctes vom Meridiane oder von der Perpendiculäre eines anderen. Einige Sätze hierüber	77	97
Verfahren beim Messen eines Meridianbogens, wenn man gar keinen Werth des Erde-Radius kennt	77	98
Dasselbe, wenn man einen angenäherten Werth des Radius der Erde gefunden hat. Hierzu die Auffindung der Entfernung eines Punctes von dem Meridiane und der Perpendiculäre eines anderen	78	99
Wie man durch wiederholte Annäherung den Radius der Erde so genau findet als man will	80	100

Zweites Kapitel.

Von den geodätischen Operationen in der Unterstellung, daß die Erde die Gestalt eines durch Umdrehung erzeugten Ellipsoides habe.

Warum man diese Unterstellung mache, und was die Erklärungen des vierten Kapitels des ersten Theiles in derselben werden.		
Warum man die Erde als ein Ellipsoid betrachtet	80	101
Die Definitionen des vierten Kapitels im ersten Theile auf das Ellipsoid angewendet. Besonders merkwürdig ist die geodätische Linie	81	102
Bestimmung der Achsen des Erde-Ellipsoides.		
Allgemeiner Begriff davon, wie diese Bestimmung durch geodätische Operationen möglich sei	84	103
Nähere Ausführung der Rechnung, welche dieses erfodert, und Angabe der Werthe, welche man für die Erdachsen, die Abplattung und die Excentricität gefunden hat. Ferner, Betrag des Meters in Toisen, und wie der Meter bestimmt wurde	86	105

Digitized by Google

	Pag.	§.
Formeln, wodurch man bei dem Messen eines Meridianbogens die Excentricität in Betracht zieht.		
Werthe aller Linien im Ellipsoide in Function der Breite des Punctes, auf welchen sie sich beziehen. Krümmungs-Halbmesser eines Meridianes und einer Perpendiculäre	88	105
Unterschied zwischen der Breite eines Punctes und dem Winkel, den eine nach dem Centrum des Ellipsoides gezogene gerade Linie mit der Ebene des Aequators macht	89	106
	90	107
	91	108
Die Aufgabe aus (93) mit Beachtung der Excentricität und mit Ausschluß der Glieder	92	109
dritter Ordnung aufgelöst. In (112) befinden sich die Endformeln	95	110
	96	111
	96	112
Numerisches Beispiel von der Anwendung dieser Formeln, um zu sehen, wie groß der Einfluß der Abplattung ist	97	113
Wenn man weiß, wie weit B von dem Meridiane und der Perpendiculäre von A entfernt ist, und man kennt die Breite von A; die Breite von B und den Längenunterschied von A und B zu berechnen. Es wird hier unterstellt, daß B und A nahe Puncte seien, man beachtet die Excentricität und schließt die Glieder dritter Ordnung aus	98	114
Wenn die Breiten von A und B und ihr Längenunterschied bekannt sind, die Entfernung des Punctes B von dem Meridiane und der Perpendiculäre von A zu berechnen. Es wird unterstellt, daß B und A nahe Puncte seien, man beachtet die Excentricität mit Ausschluß der Glieder dritter Ordnung	99	115
Einfluß der Excentricität: 1) in der Messung der Basis; 2) in der Messung und Reduction der Winkel; 3) in der Auflösung der Dreiecke. Man beweist, daß dieser Einfluß in allen drei Fällen unbedeutend ist	100	116
Auflösung der geodätischen Aufgaben durch ganz genaue Formeln.		
Gleichung des Erdellipsoides durch gewöhnliche rechtwinkelige Coordinaten, dann aber auch durch Polar-Coordinaten gegeben	107	117
Die Differential-Gleichung der geodätischen Linie als der kürzesten, welche man auf dem Ellipsoide von einem Puncte zum andern ziehen kann, durch Variations-Rechnung gefunden	108	118
Dieselbe Gleichung, ohne Variations-Rechnung	109	118 bis
Bestimmung der Constante, welche in der Differential-Gleichung der geodätischen Linie vorkömmt; Beweis einer allgemeinen Eigenschaft aller geodätischen Linien . . .	111	119
Festsetzung der eigentlichen Aufgabe, welche hier gelöst werden soll, und Aufstellung der Differential-Gleichungen, welche diese Auflösung geben werden	111	120
	112	121
Integrirung der vorhergehenden Gleichungen	113	122
		123
Umkehrung einer der erhaltenen Formeln	114	124
		125
System von Formeln, welche aus den vorhergehenden §§. hergeleitet sind und die Auflösung eines Dreieckes, gebildet durch zwei Meridiane und eine willkürlich lange	115	126
geodätische Linie, die auf dem einen Meridiane senkrecht steht, bezwecken . . .	117	127

Digitized by Google

	Pag.	§.
Auflösung der Aufgaben in (114) (115) bei willkürlicher Entfernung der Puncte A und B	117	128
Vorbereitende Formeln zur Auflösung eines Dreieckes, welches durch zwei Meridiane und eine sie beide schief durchschneidende geodätische Linie gebildet ist, wenn man Glieder dritter Ordnung beibehalten will	118 119 120	129 130 131
Aus den vorhergehenden §§. werden drei Formeln entwickelt, welche die Aufgabe in (93) mit Beachtung der Excentricität und der Glieder dritter Ordnung auflösen, welches letztere in den Formeln von (112) nicht geschehen war	121	132
Vergleichung der vorhergehenden Formeln mit denen aus (112)	121	133
Bestimmung, wie weit es erlaubt sei, die Glieder dritter Ordnung wegzulassen	122	133 bis
Auflösung der Aufgaben (114) (115) bei kleiner Entfernung der Puncte A, B, jedoch mit Einschluß der Glieder dritter Ordnung	124	134
Auflösung der Aufgabe in (94) bei geringer Größe der Entfernung AB, erst mit bloser Beachtung der Glieder 2ter Ordnung, dann auch mit Einschluß der Glieder 3ter Ordnung	126 127	135 136
Auflösung der Aufgaben in (93 und) (94) bei jeder beliebigen Größe und Lage der geodätischen Linie, mit Beachtung der Excentricität	127	137

Drittes Kapitel.

Von den Projectionen der Charten.

Von den Projectionen der Charten überhaupt und besonders von den perspectivischen Projectionen.

Was man überhaupt unter der Projection einer Charte verstehe	130	138
Eintheilung derselben in perspectivische Projectionen und Projectionen durch Entwickelung	130	139
Warum man in der Theorie der perspectivischen Projektionen unterstellt die Erde sei sphärisch	131	140

Projektion auf den Horizont.

Allgemeine Beschreibung der Projection einer Hemisphäre auf den Horizont und warum diese eine perspectivische genannt wird	131	141
Beweis, daß die Projection eines Kreises nach dem gegenwärtigen Systeme auch ein Kreis sei	131	142
Beweis, daß die Meridiane auf der Charte die nämlichen Winkel mit einander machen, wie die Meridiane auf der Kugel	133	143
Geometrische Construction der gegenwärtigen Projektions-Art	134	144
Wie man den nämlichen Zweck durch Rechnung erreichen kann	135	144 bis
Wie ein Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, projicirt wird	136	145
Auf einer Charte, welche nach dem gegenwärtigen Projections-System gezeichnet ist, eine geodätische Linie zu ziehen. — Einige Bemerkungen über die Wahl des Mittelpunctes der Charte und die Benutzung derselben um die geographische Lage der Puncte zu erkennen	137	146

Digitized by Google

	Pag.	§.
Projection auf einen Meridian.		
Allgemeine Beschreibung dieser Projection	138	147
Einen Meridian zu projiciren	138	148
Auf der Charte einen Parallelkreis zu ziehen; diese und die vorhergehende Aufgabe, analytisch aufzulösen	139	149
Projection einer Hemisphäre auf den Equator.		
Man erklärt die Konstruction derselben im Allgemeinen und bemerkt, daß diese Projection nur ein besonderer Fall von der Projection auf den Horizont ist, woraus alles was sie betrifft, ohne weitere Anleitung gefunden werden kann	140	150
Unterschied zwischen der orthographischen und stereographischen Projection. Kurze Angabe dessen, was zu thun wäre, wenn man einen großen Theil der Erdfläche orthographisch projiciren wollte	140	151
Von den Projectionen durch Entwickelung.		
Doppelter Zweck der Charten von kleineren Theilen der Erde	140	152
Festsetzung der Aufgaben, welche bei der Theorie solcher Charten vorkommen können	141	153
Was zu den Projectionen durch Entwickelung geführt haben könne	142	154
Die cylindrische Projection.		
Beschreibung und Construction derselben	143	155
Die conische Projection.		
Beschreibung und Construction derselben	144	156
Von der ursprünglichen Flamsteed'schen Projection.		
Allgemeine Beschreibung des Systems wonach projicirt wird	146	157
Untersuchung der Form der Meridiane auf der Charte; ihre Gleichung	146	158
Richtung der Meridiane in jedem beliebigen Puncte	147	159
Berechnung der Abweichung eines Meridians von seiner Tangente	147	160
Uebersicht der Aufgaben, welche die gegenwärtige Projection darbietet	147	161
Verzeichnung der Meridiane. Wie man genug Punkte derselben bestimmen könne, damit man zu ihrer Construction nur gerade Linien zu ziehen habe	148	162
Wie die Meridiane auf den Detail-Blättern beschaffen seyn müssen	149	163
Wie weit von einander die Meridiane auf der Gesammtcharte und auf den einzelnen Blättern zu ziehen seien	149	164
Man verweist zur völligen Ausführung einer Charte nach der ursprünglich Flamsteed'schen Projection auf dasjenige, was bei der modificirten Flamsteed'schen Projection vorkommen wird	150	165
Vortheile und Nachtheile des Projections-Systems wovon hier gehandelt wurde	150	166
Von der modificirten Flamsteed'schen Projection.		
Allgemeine Beschreibung ihrer Construction	150	167

Digitized by Google

	Pag.	§.
Man unterstellt hier die Erde sphärisch: Ausdrücke der Linien, welche Auf der Charte vorkommen	151	168
	152	169
Winkel der Meridiane mit den Parallelkreisen	152	170
Azimuth einer geodätischen Linie und Winkel zweier geodätischen Linien auf der Charte	152	170 bis
Winkel, den die Tangenten an zwei nahe liegende Meridiane miteinander bilden	154	171
Abweichung des Meridians von seiner Tangente	154	172
Abweichung einer geodätischen Linie von ihrer Tangente und von ihrer Sehne	155	172 bis
Die Inhalte der Figuren sind auf der Charte mit den Inhalten auf der Kugel einerlei	157	173
Construction der Parallelkreise durch Coordinaten	158	174
	158	175
Wiederholung dessen, was von (168) bis (174) gesagt ist, für den Fall, wo man die Excentricität der Erde beachtet	160	176
	160	177
	160	178
Allgemeine Angabe dessen, was bei der Aufnahme eines Landes nach der jetzigen Projection zu thun ist	161	179
	162	180
Auflösung einiger hierzu nöthigen Aufgaben	163	181
Ordnungsgemäße Beschreibung aller Operationen, welche zu (179) u. (180) gehören	164	182
Beschreibung der gewöhnlichen Art, wie man eine Charte in Blätter theilt	166	182 bis
Auflösung einiger Aufgaben, welche das Zeichnen der Meridiane und Parallelkreise erfodert, wenn man nach (182) (bis) verfährt	166	183
Die Projection von Caſſini.		
Beschreibung dieser Projection	167	184
Wie man das weitläufige Berechnen der Coordinaten der Durchschnittspuncte der Meridiane und Parallelkreise zum Theile vermeiden kann	168	185
Ueber den Gebrauch und die Genauigkeit der vorigen Formeln	169	186
Gestalt der Meridiane auf der Charte	170	187
Abweichung eines Meridians von seiner Tangente	170	188
Gestalt der Parallelkreise	172	189
Nach welchen Formeln die Puncte des trigonometrischen Netzes auf die Charte getragen werden	172	190
Den Winkel zweier geodätischen Linien auf der Charte zu finden	173	191
Die Seecharten.		
Welche Bedingungen eine Seecharte erfüllen müsse	175	192
Wie hieraus die Construction der Seecharten hergeleitet wird	176	193
	176	194
Welches Verfahren bei der Zeichnung einer Seecharte zu beobachten sei	177	195
Begriff von dem Nutzen der Seecharten	178	195 bis

Digitized by Google

	Pag.	§.
Viertes Kapitel.		
Von den Höhenmessungen.		
Gegenstand des Kapitels	178	196
Berechnung der Höhe eines Punctes A über einem anderen B, wenn man von B aus die Zenithaldistanz des Punctes A gemessen hat, und wenn die Entfernung AB bekannt ist. Hierzu: Reduction einer Zenithaldistanz auf den Gipfel des Signals	178	197
Welchen Einfluß die atmosphärische Refraction auf die Zenithaldistanzen ausübt. — Warum die Refraction bei der Reduction eines Winkels auf den Horizont nicht beachtet zu werden braucht	180	198
Wie der Einfluß der Refraction beim Höhenmessen zu vermeiden oder zu bestimmen sei.	180	199
Wie man die Höhe von A über B bestimmen könnte, ohne die Entfernung AB zu kennen. Ferner, wie man verfahren müßte, wenn A oder B oder beide unzugänglich wären	181	200
Wie man bei einer Höhenmessung die Excentricität der Erde in Betracht ziehen kann.	182	201
Wenn man aus den so eben gefundenen weitläufigen Formeln die Glieder dritter Ordnung wegläßt, so erhält man eine einzige kurze Endformel	185	202
Wie aus einer Zenithaldistanz des Meer-Horizontes die Höhe des Ortes der Beobachtung über der Meeresfläche geschlossen werden könne	187	203
Gebrauch des Barometers zum Höhenmessen.		
Vordersätze worauf das Höhenmessen mit dem Barometer beruht	188	204
Mathematische Theorie des Höhenmessens mit dem Barometer	189	205
Die genaueste Formel, welche die gesuchte Höhe giebt	190	206
Eine kürzere aber minder genaue Formel	192	207
Bemerkungen über die Capillarität der Barometer-Röhre, über die Temperatur des Quecksilbers im Barometer und über den Einfluß des Ortes und der Zeit der Beobachtung auf ihre Resultate	192	208
Wie barometrische Höhenmessungen zur Bestimmung der Entfernung zweier Puncte angewendet werden können	194	209
Dritter Theil.		
Formulare zu trigonometrischen Berechnungen.		
Vorläufige Bemerkungen.		
In diesen Bemerkungen wird Verschiedenes angeführt, welches zum Verstehen der Formulare nothwendig ist	195	
Erstes Kapitel.		
Berechnung der Seiten eines trigonometrischen Netzes.		
Schema zu einer trigonometrischen Feldnote. Hierzu ein practisches Mittel um die Elemente zur Reduction auf das Centrum mit gehöriger Gewißheit zu finden	197	210

Digitized by Google

	Pag.	§.
Angenäherte Berechnung der Seiten der Dreiecke	198	211
Formular zur Reduction der Winkel auf das Centrum der Stellung	199	212
Zwei Formulare zur Reduction eines Winkels auf den Horizont	200	213
Genaue Berechnung der Seiten der Dreiecke nach der Methode von Legendre . .	202	214
Auflösung eines Dreieckes durch die Sehnen-Methode	203	215
Verschiedene Mittel um die Summe der Irrthümer, welche in der Beobachtung der Winkel eines Dreieckes begangen wurden, kennen zu lernen	207	216
Formular zur Auflösung eines Netz-Dreieckes, wenn drei Seiten desselben bekannt sind	208	217
Das Nämliche, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des Dreieckes gegeben sind	209	218
Das Nämliche, wenn eine Seite und die daran liegenden Winkel gegeben sind . .	210	219
Mittel, die Lage seines Standpunctes zu finden, wenn man aus demselben die drei Ecken eines bekannten Dreieckes beobachten kann	211	220
Formular um den Inhalt eines Netzdreieckes zu berechnen	213	221

Zweites Kapitel.

Berechnung der geographischen Längen und Breiten der Puncte eines trigonometrischen Netzes und der Azimuthe der darin vorkommenden geodätischen Linien.

Vorläufige Bemerkungen, welche zu unserm Zwecke führen und Festsetzung der Bedeutung der Buchstaben, die wir zu gebrauchen gedenken	214	222
Formular, um die Breite eines Punctes B und den Azimuth der geodätischen Linie AB in B zu berechnen, wenn die Breite von A und der Azimuth der Linie AB in A, ferner auch die Entfernung AB gegeben sind. Man betrachtet hier den Fall, wo die geodätische Linie noch immer eine Netz-Dreiecks-Seite seyn könnte, aber doch größer als 30000 Meter ist	215	223
Formular um die vorhergehende Aufgabe aufzulösen, wenn die geodätische Linie kürzer als 30000 Meter ist	219	224
Auflösung der nämlichen Aufgabe bei jeder beliebigen Ausdehnung der geodätischen Linie	221	225

Drittes Kapitel.

Berechnung der Entfernung zweier Puncte aus ihrer geographischen Lage.

Formular um die Entfernung AB und ihre Azimuthe zu berechnen, wenn die Breiten von A und B und der Längenunterschied beider Puncte gegeben sind. Man betrachtet hier den Fall, wo die Entfernung beliebig groß seyn kann	226	226
Auflösung dieser Aufgabe, wenn die gesuchte geodätische Linie zwischen 30000 und 300000 Meter enthalten ist	230	227
Wie man verfahren müsse, wenn die geodätische Linie weniger als 30000 Meter beträgt, ist gesagt zu Ende	230	227

Digitized by Google

	Pag.	§.
Viertes Kapitel.		
Auflösung mehrerer Aufgaben, welche bei der Construction der perspectivischen Projectionen vorkommen.		
Formulare und Anleitung zur Projection einer Hemisphäre auf den Horizont . . .	233	228
Zur Projection einer Hemisphäre auf einen Meridien	235	229
Fünftes Kapitel.		
Construction einer Charte nach der modifizirten Flamsteed'schen Projection.		
Zu bestimmen in wie viele Zonen das aufzunehmende Land getheilt werden müsse . .	236	230
Die Ausdehnung der Detail-Blätter in geographischer Länge und Breite zu finden .	238	231
Bildung einer Tabelle der Logarithmen der Krümmungs-Halbmesser der Meridiane und Perpendiculären	238	232
Berechnung der Radien der Parallelkreise, welche die Blätter begrenzen sollen . . .	240	233
Bildung der Tabelle aller Θ	242	234
Berechnung der Coordinaten der Eckpuncte der Blätter	244	235
Construction der Randlinien der Blätter	244	236
Projection der Puncte des trigonometrischen Netzes auf die Detail-Blätter . . .	246	237
Wie man die Ecke eines Dreieckes, wenn seine geographische Lage nicht bekannt ist, projiciren kann. Wir schlagen vor das hier angegebene Mittel für alle Puncte des trigonometrischen Netzes anzuwenden	247	238
Von dem Zusammentragen mehrerer einzelnen Charten in eine einzige Gesammt-Charte	249	239
Sechstes Kapitel.		
Anlage einer Charte nach der Projection von Cassini.		
Wie man sucht, ob das ganze aufzunehmende Land in einem Male projicirt werden könne; oder ob es in mehrere besondere Charten getheilt werden müsse . . .	251	240
Bestimmung der Größen der Detail-Blätter	251	241
Construction einer Figur zur Uebersicht der ganzen Charte	252	242
Bestimmung der Breiten der Puncte, welche auf dem mittleren Meridiane liegen . .	252	243
Bezeichnung der Blätter	254	244
Projection eines Punctes im trigonometrischen Netze	254	245
Das Nämliche für den Fall, wo der Punct einen größeren Längenunterschied mit dem mittleren Meridiane hat als 30′	255 256	246 247
Bestimmung der Richtung eines Meridians auf einem Blatte	258	248
Projection eines Punctes im trigonometrischen Netze, wenn seine geographische Lage nicht bekannt ist	259	249
Zusammenstellung mehrerer einzelner Charten	260 261	250 251

Digitized by Google

	Pag.	§.
Siebentes Kapitel.		
Construction einer Seecharte.		
Vollständige Anleitung hierzu	262	252
Achtes Kapitel.		
Höhenmessungen.		
Formular zur Reduction einer Zenithaldistanz auf den Gipfel des Signals . . .	261	253
Bestimmung des Refractions-Coeffizienten	264	254
Eine Zenithal-Distanz vor der Refraction zu corrigiren	265	255
Die Höhe von A über B zu finden, wenn die Entfernung AB und die wechselseitigen Zenithaldistanzen der Puncte A und B gegeben sind	265	256
Durch die bloßen wechselseitigen Zenithaldistanzen und die Kenntniß des Refractions-Winkels, ohne die Entfernung AB zu kennen, die Höhe von A über B ohngefähr zu bestimmen	266	257
Wenn das Nämliche, wie eben, bekannt ist, die Entfernung AB ohngefähr zu bestimmen	267	258
Mit Hülfe einer von der Refraction corrigirten Zenithaldistanz nnd der Entfernung AB die Höhe von A über B genau zu finden	267	259
Wenn die Höhe von A über B und zwei wechselseitige Zenithaldistanzen bekannt sind, die Entfernung AB ohne Kenntniß der Refraction zu bestimmen	268	260
Wie man eine Höhe mit vollkommener Beachtung der Excentricität der Erde berechnen müsse	168	261
Aus der Zenithaldistanz des Meer-Horizontes die Höhe des Standpunctes über der Meeres-Fläche zu berechnen	270	262
Berechnung einer Höhe durch barometrische Beobachtungen; man gebraucht hier die genaueste Formel	271	263
Das Nämliche nach einer minder genauen Formel	272	264
Wie durch das Barometer in Verbindung mit einem Winkelmesser, die Entfernung zweier Puncte gefunden werden könne	272	265
Neuntes Kapitel.		
Auflösung einiger besondern geodätischen Aufgaben.		
Wenn die Breiten der Endpuncte eines Meridianbogens gegeben sind, den Bogen selbst zu berechnen	273	266
Wenn die Größe eines Meridianbogens und die Breite des einen seiner Endpuncte gegeben sind, die Breite des andern Endpunctes zu finden	274	267
Wenn die Breite eines Punctes A und seine Länge, von einem andern Puncte B her gezählt, gegeben sind, die Größe der Perpendiculäre, welche von A aus nach		

Digitized by Google

	Pag.	§.
dem Meridiane von B geht, und die Breite des Fußes dieser Perpendiculäre zu berechnen	276	268
Wenn die Entfernungen eines Punctes A von dem Meridiane und der Perpendiculäre des Punctes B, ferner die Breite von B, bekannt sind, die Breite von A und den Längenunterschied der Puncte A und B zu berechnen	276	269
Die nämliche Aufgabe, wenn die gegebenen Entfernungen nicht größer als 30000 Meter sind	277	270
Die nämliche Aufgabe, wenn die gegebenen Entfernungen jede beliebige Größe haben	278	271

Anhang.

Ueber Winkel-Meßinstrumente.

Zweck dieses Anhanges	283	1
Eintheilung der Winkelmesser in Horizontalwinkelmesser und solche, welche die Winkel in ihrer Ebene selbst geben. Als Beispiel der erstern wird der Meßtisch genommen und seine Alhidade kurz beschrieben	283	2
Vollständige Erklärung der optischen Achse des Fernrohres	284	3
Veränderungen, welchen die optische Achse ausgesetzt ist	285	4
Irrthum, den eine fehlerhafte Alhidade hervorbringt	286	5
Berichtigung des Irrthums, welcher dadurch entsteht, daß die Visirlinie nicht auf der Dreh-Achse des Fernrohres senkrecht steht	288	6
Anderes Mittel, denselben Fehler zu erkennen und zu berichtigen	288	7
Erkennen des Irrthums, welcher dadurch entsteht, daß die Dreh-Achse des Fernrohres nicht mit der Ebene des Winkelmessers parallel läuft	289	8
Berichtigung dieses Irrthums	290	9
Andere Methode hierzu	291	10
Genaue Bestimmung und Berechnung der Fehler einer Alhidade	291	11
Berechnung ihres Einflusses auf die gemessenen Winkel	294	12
Welchen Einfluß die nicht gehörig horizontal gesetzte Ebene des Winkelmessers auf die durch denselben gefundenen Winkel ausübt	295	13
Gehörige Einrichtung und Eintheilung einer Luftblasen-Wasserwage	297	14
Gebrauch der röhrenförmigen Wasserwage zur Bestimmung kleiner Neigungen gegen den Horizont	298	15
Gebrauch der doseuförmigen Wasserwage zu gleichem Zwecke	299	16
Von den Winkelmessern, welche die Winkel in ihren eigenen Ebenen und auch zugleich Zenithaldistanzen geben können	299	17
Kurze Beschreibung eines solchen Instrumentes und Betrachtung der Fehler, welche darin obwalten können	299	18
Berechnung des Einflusses dieser Fehler auf die gemessenen Winkel	300 301	19 20
Regulirung der optischen Achse des Fernrohres	303	21
Von der Wiederholung der Winkel im Allgemeinen	303	22

Digitized by Google

	Pag.	§.
Genaue Unterscheidung der Irrthümer, welche durch die Wiederholung vermieden werden, von denjenigen, welche nicht in diesem Falle sind	304	23
Einrichtung und Gebrauch der Wiederholungs-Kreise mit zwei Fernröhren . . .	305	24
Beachtung der Excentricität der Fernröhre in solchen Instrumenten	305	25
Wie man nach geschehener Beobachtung des doppelten Winkels den vierfachen, sechsfachen, achtfachen ꝛc. findet	307	26
Betrachtung einiger Schwierigkeiten, die sich beim Aufstellen der Instrumente ereignen können, wenn das Centrum der Stellung nicht zugänglich und von der angenommenen Stellung her nicht sichtbar ist	307	27
Beseitigung der Schwierigkeiten, welche sich darbieten, wenn man einen Winkel zwischen zwei Puncten messen soll, wovon der eine nicht genau sichtbar ist, z. B. der Mittelpunct eines abgestumpften Thurmes	308	28
Von der Messung der Zenithaldistanzen im Allgemeinen	309	29
Einfluß der Fehler des Winkelmessers auf die mit demselben genommenen Zenithal-Distanzen	309	30
Mittel, die Fehler des Instrumentes zu bestimmen	310	31
Wie sie zum Theil durch Wiederholung der Zenithaldistanzen gänzlich ausser Wirkung gebracht werden können	311	32
Nähere Erfordernisse der vorhin beschriebenen Beobachtungs-Weise	312	33
Beschreibung und Gebrauch der Achsen-Wasserwage	313	34
Beschreibung und Gebrauch der parallelen Wasserwage	313	35
Beschreibung der Irrthümer, welche durch den fehlerhaften Gebrauch eines richtigen Instrumentes begangen werden können	314 314	36 37
Nützlichkeit einer Einrichtung, wodurch die Haupt-Achse eines Wiederholungs-Kreises vertical gestellt werden könne	315	38

Digitized by Google

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Wiederholung mehrerer Sätze und Formeln aus der Trigonometrie, der Lehre von den Reihen und der Differentialrechnung.

1) Wie bekannt, ist

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Beziehungen der trigonometrischen Linien untereinander.

2) Aus den vorigen Formeln erhält man folgende:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin b \cos a;$$

setzt man $(a+b)=p$, $(a-b)=q$, so ist $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$; daher

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{q-p}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Digitized by Google

Diese Formeln sind sehr nützlich, um die Berechnung eines Ausdruckes durch Logarithmen zu erleichtern, indem sie Summen in Producte verwandeln.

3) Aus den Formeln in (1) fließen nachstehende: $\sin 2b = 2 \sin b \cos b$, $\cos 2b = \cos^2 b - \sin^2 b$, und weil $1 = \cos^2 b + \sin^2 b$, so ist: $1 + \cos 2b = 2\cos^2 b$ und $\cos 2b = 2\cos^2 b - 1$; dann $\cos 2b - 1 = -2\sin^2 b$, $\cos 2b = 1 - 2\sin^2 b$.

Es sind $\cos^2 b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2b$, $\sin^2 b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2b$; folglich:

$$\cos^4 b = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos 2b + \tfrac{1}{4}\cos^2 2b;$$

$$\sin^4 b = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2b + \tfrac{1}{4}\cos^2 2b;$$ da nun $\cos^2 2b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4b$, so erhält man: $\cos^4 b = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2b + \frac{1}{8}\cos 4b$,

$$\sin^4 b = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2b + \tfrac{1}{8}\cos 4b.$$

Die Formeln in (1) geben auch:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a =$$

$$= \sin a - 2\sin^3 a + \sin 2a \cos a;$$ aber aus (2) ist:

$$\sin 2a \cos a = \tfrac{1}{2}\sin 3a + \tfrac{1}{2}\sin a,$$ also:

$$\sin 3a = \sin a - 2\sin^3 a + \tfrac{1}{2}\sin 3a + \tfrac{1}{2}\sin a,$$ oder

$$\tfrac{1}{2}\sin 3a = \tfrac{3}{2}\sin a - 2\sin^3 a,$$ mithin:

$$\sin^3 a = \tfrac{3}{4}\sin a - \tfrac{1}{4}\sin 3a.$$

$\cos^3 a$ kann man auf dieselbe Art finden, doch wollen wir ihn folgendermaßen berechnen, weil die Methode sich leicht auf $\sin^5 a$ und $\cos^5 a$ anwenden läßt:

$$\cos^2 a = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2a,$$ also $\cos^3 a = \frac{1}{2}\cos a + \frac{1}{2}\cos a \cos 2a$;

nach (2) ist $\cos a \cos 2a = \frac{1}{2}(\cos 3a + \cos a)$, mithin:

$$\cos^3 a = \tfrac{1}{4}\cos 3a + \tfrac{3}{4}\cos a.$$

4) Folgende sind die gebräuchlichsten unter den Formeln, wo Tangenten in Rechnung gebracht sind: $\frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tang} b$, daher $1 + \operatorname{tang}^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} = \sec^2 b$; $\cos^2 b = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 b}$;

$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$; $\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}$: aus (2) findet man auch

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{p-q}{2}\right)}.$$

Digitized by Google

5) Es sei $f(x+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+Eh^4+Fh^5+\ldots\ldots$, wo $f(x+h)$ irgend eine Function von $(x+h)$ bedeutet; man soll A, B, C, ... bestimmen.

Macht man beiderseits $h=o$, so ist $f(x)=A$.

Nun muß nothwendig dasselbe herauskommen, wenn man den Differentialcoefficienten von $f(x+h)$ nach h oder nach x nimmt, weil x und h genau auf die nämliche Art in $f(x+h)$ stehen.

Der obige Werth von $f(x+h)$ nach x differentiirt und durch dx dividirt, giebt: $\frac{df(x)}{dx}+\frac{d.B}{dx}.h+\frac{d.C}{dx}h^2+\frac{d.D}{dx}h^3+\ldots\ldots$; derselbe nach h differentiirt und durch dh dividirt wird: $B+2Ch+3Dh^2+4Eh^3+\ldots\ldots$

Diese beiden Reihen müssen aber, wie oben bemerkt, identisch seyn; folglich ist

$$B=\frac{d.f(x)}{dx},\ C=\tfrac{1}{2}.\frac{d^2f(x)}{dx^2},\ D=\frac{1}{2.3}.\frac{d^3f(x)}{dx^3}\ldots\ldots;$$

also: $f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}.h+\frac{1}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}.h^2+\frac{1}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}h^3+\ldots.$

welches die bekannte Formel von Taylor ist.

6) Wenn $f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots$ ist, soll man A, B, C, etcet.... bestimmen.

Wenn man die Gleichung mehrmal differentiirt, so erhält man:

a) $\frac{d.f(x)}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+\ldots.$,

b) $\frac{d^2f(x)}{dx}=2C+2.3.Dx+3.4.Ex^2+\ldots.$,

c) $\frac{d^3f(x)}{dx^3}=2.3.D+2.3.4.Ex+\ldots\ldots$; setzt man nun in allen Gleichungen $x=o$ und bezeichnet durch $f(o)$, $\frac{d.f(o)}{dx}$, $\frac{d^2f(o)}{dx^2}$ etcet... dasjenige, was die Größen $f(x)$, $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, etcet. in dieser Unterstellung werden, so erhält man: $f(o)=A$, $\frac{d.f(o)}{dx}=B$, $\frac{1}{2}.\frac{d^2f(o)}{dx^2}=C$ u. s. w. ...

Es ist also $f(x)=f(o)+x.\frac{d.f(o)}{dx}+\frac{x^2}{2}.\frac{d^2f(o)}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}.\frac{d^3f(o)}{dx^3}+\ldots\ldots$

Digitized by Google

7) Man habe die Gleichung: $u = a + \varepsilon f(u)$, und wolle u in eine Reihe, welche nach ε geordnet ist, entwickeln.

Es sei $u = \varphi(\varepsilon)$, so ist nach (6) $u = \varphi(o) + \varepsilon . \frac{du}{d\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2} . \frac{d^2 . u}{d\varepsilon^2} + \ldots\ldots$ wo unterstellt wird, daß man in den Differentialcoefficienten, $\frac{du}{d\varepsilon}, \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \ldots\ldots$, $\varepsilon = o$ gemacht habe; diese Coefficienten sind also zu finden.

Die Gleichung $u = a + \varepsilon f(u)$ giebt für $\varepsilon = o$, $u = a$, woher $\varphi(o) = a$. Ferner ist $du = d\varepsilon . f(u) + \varepsilon d . f(u)$; macht man hier $\varepsilon = o$, so ist $\frac{du}{d\varepsilon} = f(a)$, weil für $\varepsilon = o$, $u = a$ ist. Nun hat man $\frac{d^2 u}{d\varepsilon} = d . f(u) + \varepsilon \frac{d^2 f(u)}{d\varepsilon} + d . f(u) = 2 . d . f(u) + \varepsilon \frac{d^2 f(u)}{d\varepsilon}$; mithin $\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = \frac{2 . d . f(u)}{d\varepsilon} + \varepsilon \frac{d^2 . f(u)}{d\varepsilon^2}$.

Nennt man $f'(u)$ den Differentialcoefficienten erster Ordnung von $f(u)$, so ist $d . f(u) = f'(u) . du$; also: $\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = 2 f'(u) . \frac{du}{d\varepsilon} + \varepsilon \frac{d^2 f(u)}{d\varepsilon^2}$; beiderseits $\varepsilon = o$ giebt mit Beachtung des Vorigen $\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = 2 . f'(a) . f(a)$. So fände man auch die übrigen Coefficienten, welche wir aber in der Folge nicht nöthig haben werden.

Man hat also $u = a + \varepsilon f(a) + \frac{\varepsilon^2}{2} . 2 f'(a) f(a) + \ldots\ldots$ Wir bemerken noch, daß man $2 f'(a) f(a)$ erhält, wenn man das Quadrat von $f(a)$ nach a differentiirt, indem $2 f'(a) . f(a) = \frac{d(f(a))^2}{da}$ ist.

8) Wenn man den Differentialcoefficienten erster Ordnung einer $f(x)$, welchen wir $f'(x)$ nennen wollen, in eine Reihe entwickeln kann, die nach x geordnet ist, so kann man leicht durch Integriren $f(x)$ selbst entwickeln. Es sei: $f'(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, so ist $f'(x) dx = A dx + B x . dx + C x^2 . dx + D x^3 . dx + \ldots\ldots$; beiderseits integrirt giebt: $f(x) = A x + \frac{B}{2} x^2 + \frac{C}{3} x^3 + \ldots + \text{const.}$; macht man in dieser Gleichung $x = o$, so findet man const. $= f(o)$.

Anwendungen der vorhergehenden Formeln.

9) $(x + a)^m$ entwickelt man leicht nach der Formel von Taylor (5), und man erhält: $(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$

Digitized by Google

10) Es ist, wie bekannt, $\log.\text{tab}.(x+1) = k.\text{nep}.\log(x+1)$ wo $k = \frac{1}{\text{nep log}.10}$; ferner hat man $\frac{d.\text{nep}.\log(x+1)}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots\ldots$, also $\frac{d.\log.\text{tab}.(x+1)}{dx} = k(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots)$; wendet man hier (8) an, so findet man: $\log\text{tab}(x+1) = k\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\right)$ Der Werth von k ist 0,4342944819.

11) Sin. x und cos. x nach (6) entwickelt geben folgende Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \ldots\ldots;$$

tang x entwickeln wir wie folgt:

$$\frac{d.\tang x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots;$$

wenn wir nur höchstens die sechste Potenz von x beibehalten wollen, so ist:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{4.3.3} + \frac{x^6}{3.4.5},$$

$$\sin^4 x = x^4 - \frac{2x^6}{3},$$

$$\sin^6 x = x^6,$$

---

also $\frac{d.\tang x}{dx} = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{5.9} + \ldots\ldots,$

mithin $\tang x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17.x^7}{5.7.9}.$

12) Man hat $d(\text{bog}.\tang = x) = \frac{dx}{1+x^2} = dx(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots\ldots),$

also: $(\text{bog}.\tang. = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots\ldots$

13) a^x nach (6) entwickelt, giebt:

$$a^x = 1 + (\text{nep}.\log.a).x + \frac{(\text{nep}.\log.a)^2}{2}.x^2 + \frac{(\text{nep}.\log.a)^3}{2.3}x^3 + \ldots;$$

mithin, wenn e die Basis des Neper'schen Logarithmensystems ist:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4}x^4 + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

14) Aus der letzten Formel erhält man leicht:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

15) Wir haben in (11) die sinus, cosinus und tang. mit ihren Bogen in Rechnung gebracht; wenn aber mit Linien soll gerechnet werden, so müssen dieselben alle mit dem nämlichen Maaße ausgemessen seyn; dieses Maaß ist hier der Radius, weil man denselben $= 1$ setzt. In den Reihen von (11) bedeutet also x das Verhältniß der Länge des Bogens zum Radius.

Es halte der Bogen z. B. 7°; will man dann x haben, so setze man folgende Proportion: Länge des Bogens: Halbkreis $= 7 : 180$; aber Halbkreis $= \pi R$, wenn π das Verhältniß des Kreises zum Durchmesser, und R der Radius ist; also: Länge des Bogens: $\pi R = 7 : 180$, woraus $\frac{\text{Länge des Bogens}}{R} = x = \frac{7 \cdot \pi}{180}$. Diesen Ausdruck nennt man den Bogen in Theilen des Radius, weil der Bogen wirklich so viele Theile des Radius enthält als der Ausdruck anzeigt.

Wäre der Bogen in Theilen des Radius gegeben, so fände man seine Anzahl Grade, wenn man denselben mit $\frac{180}{\pi}$ multiplicirte. Die Zahl π ist 3,1415926.

Man pflegt gewöhnlich den Bogen in Theilen des Radius auf folgende Art zu finden: wenn man nämlich weiß, was für ein Theil des Radius der Bogen von einer Secunde ist, so läßt sich daraus sogleich sagen, wie viel ein Bogen, welcher in Secunden angegeben ist, in Theilen des Radius beträgt. Nun ist aber sin 1″ das Verhältniß des sin 1″ zum Radius, und so weit die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln berechnet sind, ist sin 1″ = tang 1″ mithin auch sin 1″ = bog 1″. Also ist sin 1″ gleich dem Bogen von einer Secunde in Theilen des Radius.

Daraus geht nun hervor, daß a″ = a sin 1″ Theile des Radius sind, und daß b Theile des Radius einem Bogen von $\frac{b}{\sin 1''}$ Secunden zugehören.

Dasselbe gilt auch noch von sin 1′.

Auffindung des Krümmungs-Kreises.

16) (Fig. 1.) Der Krümmungs-Kreis am Puncte M der krummen Linie NMP ist unter allen Kreisen, welche durch M gehen, derjenige, dessen Krümmung in M am meisten mit der krummen Linie übereinkömmt.

Digitized by Google

Man beweiſ't in der Differentialrechnung, daß das Centrum dieſes Kreiſes da liegt, wo die Normale in M von einer ihr unendlich nahen geſchnitten wird.

17) Die Gleichung der krummen Linie ſei nun $y=f(x)$, und man ſetze $dy=f'(x)dx$, $d^2y=f''(x)dx^2$; y', x' ſeien die Coordinaten von M, ſo iſt $y'=f(x')$.

Die Gleichung der Normale in M iſt, wie bekannt: $y-y'=-\frac{1}{f'(x')}(x-x')$; will man die Gleichung einer unendlich nahen haben, ſo muß man in die vorige anſtatt y' und x', $y'+dy'$ und $x'+dx'$ ſetzen, und um den Durchſchnittspunkt der beiden Linien zu finden, zwiſchen ihren Gleichungen y oder x eliminiren; das erſtere kann dadurch geſchehen, daß man die eine Gleichung von der andern abzieht; man ſieht aber ſogleich, daß dasjenige, was heraus kömmt, das nämliche ſeyn muß, welches man erhält, wenn man die Gleichung $y-y'=-\frac{1}{f'(x')}(x-x')$ nach y' und x' differentiirt, alſo:

$-dy'=\frac{f''(x')dx'}{(f'(x'))^2}(x-x')+\frac{dx'}{f'(x')}$. Da nun $dy'=f'(x').dx'$ iſt, ſo wird

$x-x'=-\frac{(f'(x'))^3-f'(x')}{f''(x')}=\frac{f'(x')\{1+(f'(x'))^2\}}{f''(x')}$ und daher $y-y'=\frac{1+(f'(x'))^2}{f''(x')}$,

woraus man y und x, das heißt die Coordinaten des Centrums des Krümmungs-Kreiſes beſtimmt.

Der Radius deſſelben iſt offenbar $=\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}=\sqrt{\frac{\left(1+(f'(x'))^2\right)^3}{(f''(x'))^2}}=$

$=\frac{\left(1+(f'(x'))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x')}$.

18) $f(x, y, z)$, ſtelle eine Function von mehreren veränderlichen Größen x, y, z vor; aus x werde $x+\Delta x$, aus y, $y+\Delta y$ aus z, $z+\Delta z$, ſo wird die ganze $f(x, y, z)$ eine Veränderung leiden, welche eine Function von x, y, z, Δx, Δy, Δz, iſt. Wenn ſich dieſe Veränderung nach den Potenzen von Δx, Δy, Δz entwickeln läßt, ſo ſei ſie: Berechnung kleiner Veränderungen in dem Werthe einer Function.

$$A.\Delta x+B.\Delta y+C.\Delta z+A'(\Delta x)^2+B'(\Delta y)^2+C'(\Delta z)^2+\ldots\ldots$$

wo A, B, C, A', B', C' etcet.. Functionen von x, y, z bedeuten.

Nun iſt aber offenbar $Adx+Bdy+Cdz$ das Differential von $f(x, y, z)$; woraus ſich ergiebt, daß man den Theil in obiger Reihe, welcher die erſten Potenzen von Δx, Δy, Δz, enthält, ſehr leicht berechnet, indem man $f(x, y, z)$ differentiirt, und die dx, dy, dz in die gegebenen Δx, Δy, Δz, verwandelt.

Digitized by Google

Ueber den Gebrauch der Logarithmen- und Sinus-Tafeln *).

19) Wenn man in einer Rechnung den Logarithmen einer Zahl gefunden hat, so kann man faſt nie ſicher ſeyn, daß in denſelben kein Irrthum von 0,0000001 Statt finde; denn wenn man auch unterſtellte, daß die Logarithmen, welche man in den Tafeln, Theils unmittelbar, Theils mit Hülfe der bekannten Proportion, findet, in der ſiebenten Decimalſtelle richtig wären, ſo iſt es doch offenbar, daß an denſelben in der achten beinahe immer eine oder mehrere Einheiten vernachläſſigt oder hinzugeſetzt worden ſind; ſo, daß bei der Addition mehrerer ſolcher Logarithmen leicht ein Irrthum von 0,0000001 begangen wird.

Der Gebrauch des in den Tafeln gewöhnlich angebrachten Differenzen-Täfelchens macht, daß man oft ſchon aus den Tafeln ſelbſt einen Logarithmen mit 0,0000001 Irrthum heraus ſchreibt; denn wenn im unmittelbar gefundenen Logarithmen ein Irrthum von 0,00000004 und in der Differenz einer von 0,00000002 ſeyn kann, ſo bilden dieſe zuſammen einen von 0,00000006, für welchen man 0,0000001 ſchreibt.

20) Wenn nun aus dem Vorhergehenden folgt, daß man in dem Logarithmen einer Zahl wohl einen Irrthum von 0,0000001 zu befürchten habe, ſo entſteht die Frage: wie genau findet man in den Tafeln eine Zahl durch ihren Logarithmen?

Dieſe Frage verwandelt ſich bei näherer Unterſuchung in folgende: Wenn der Logarithme einer Zahl ſich um 0,0000001 verändert; um wieviel verändert ſich die Zahl ſelbſt? Man kann ſie beantworten, wie folgt.

Die Zahl iſt eine Function ihres Logarithmen; die Veränderung der Zahl läßt ſich in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Veränderung des Logarithmen geordnet iſt, daß heißt, nach den Potenzen von 0,0000001; da nun ſchon die zweite Potenz dieſer Zahl in Vergleich mit der erſten äußerſt klein iſt, ſo werden wir in der zu findenden Reihe nur das Glied in Betracht ziehen, wo 0,0000001 auf die erſte Potenz erhoben iſt. Dieſes Glied finden wir nun mit Anwendung von (10) und (18) folgendermaßen: es iſt $d.\log\text{tab.zahl} = \frac{k \,.\, d.\,\text{zahl}}{\text{zahl}}$, alſo $d.\text{zahl} = \frac{\text{zahl} \times d.\log}{k}$. Nun iſt hier $d.\log = 0{,}0000001$, $k = 0{,}4343$; ferner ſind die Zahlen, welche man in den Tafeln ſucht, immer fünfziffrige, alſo immer kleiner als 100000; mithin iſt alſo $d.\text{zahl}$, oder die geſuchte Veränderung der Zahl, immer weniger als $\frac{100000 \times 0{,}0000001}{0{,}4343} = \frac{100}{4343} = 0{,}023$.

*) Alles was in dieſer Abtheilung geſagt wird, bezieht ſich auf Tafeln, welche wie die von Callet oder von Vega eingerichtet ſind.

Digitized by Google

Man findet also eine fünfziffrige Zahl, deren Logarithme bis auf 0,0000001 genau ist, bis auf 0,02 genau, mithin immer wenigstens sechs richtige Ziffer. Der Irrthum kann in besondern Fällen weit geringer seyn; denn für die kleinste fünfziffrige Zahl, nämlich 10000, wäre er blos 0,0023; er ist also von 0,0023 bis 0,023 veränderlich.

Der eben berechnete Irrthum ist nicht der einzige, welchen man bei der Auffindung einer Zahl durch ihren Logarithmen zu befürchten habe; denn wenn man auch den Logarithmen ganz genau kennt, so findet man doch die zugehörige Zahl, wegen der Unrichtigkeit der zu machenden Proportion, nicht immer ganz genau: aber dieser Irrthum ist so unbedeutend, daß er gegen den vorigen nicht in Betracht kommen kann, wie aus folgender Rechnung erhellen wird.

Die fünfziffrige Zahl, welche der gesuchten am nächsten kömmt sei n; das was noch an n fehlt sei x, welches also immer kleiner als 1 ist. Nun macht man folgende Proportion: $\log(n+1) - \log n : \log(n+x) - \log n = 1 : \delta$, und zu n setzt man dieses δ anstatt x; es fragt sich also: um wieviel ist δ von x verschieden?

Die obige Proportion ist die nämliche als: $\log\left(\frac{n+1}{n}\right) : \log\left(\frac{n+x}{n}\right) = 1 : \delta$; mithin

$$\delta = \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{k\left(\frac{x}{x} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} \cdots\cdots\right)}{k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \cdots\cdots\right)} = \frac{x - \frac{x^2}{2n} \cdots}{1 - \frac{1}{2n} \cdots} =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2n} + \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2n} + \cdots\right)^{-1} = \left(x - \frac{x^2}{2n} \cdot\cdot\right)\left(1 + \frac{1}{2n} \cdots\right) =$$

$= x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x}{2n} = x - \frac{x(x-1)}{2n}$..... Der Unterschied von δ und x ist also $\frac{x(x-1)}{2n}$ und noch Glieder wo n^2 im Nenner ist; diese sind aber in Vergleich mit $\frac{x(x-1)}{2n}$ unbedeutend, indem n wenigstens 10000 ist.

Der Unterschied $\frac{x(x-1)}{2n}$ wird am größten, wenn $x = \frac{1}{2}$ und n am kleinsten, das heißt, gleich 10000 ist; mithin können δ und x höchstens um $\frac{1}{80000}$ verschieden seyn, woraus sich die Wahrheit der oben gemachten Behauptung ergiebt.

Digitized by Google

21) Die Logarithmen der trigonometrischen Linien, welche man in den Tafeln findet, sind alle um 10 zu groß, mit Ausnahme der Logarithmen der tang: von 45° bis 90° in einigen Tafeln; deswegen ist immer $\log \sin x = \log \text{tab} \sin x - 10$.

22) Um zu sehen, in wie weit man auf die Genauigkeit der Sinustafeln zählen könne, wollen wir uns folgende Fragen aufstellen und beantworten:

1°. Kann man den log: sinus oder log: cos: eines Bogens in den Tafeln immer bis auf 7 Decimalstellen richtig finden?

Wenn die Tafeln von 10 zu 10 Secunden berechnet sind, so findet man den log: eines sin: oder cos: von $10m''$ unmittelbar in denselben, also auch bis auf 7 Decimalstellen richtig. Soll man aber den log sin: eines Bogens von $(10m+n)''$, (wo m eine ganze Zahl ist, und $n<10$ seyn muß) finden, so macht man eine nicht ganz richtige Proportion, deren Unrichtigkeit im gesuchten log: einen Irrthum hervorbringt, welcher zu berechnen ist. Aus dieser Proportion soll nämlich $\log \sin (10m+n)'' - \log \sin 10m''$ gefunden werden, und sie ist folgende: $10 : n = \log \sin (10m''+10'') - \log \sin . 10m'' : \log \sin (10m+n)'' - \log \sin . 10m''$.

Es fragt sich daher: um wie viel ist $\log \sin (10m+n)'' - \log \sin 10m''$ von seinem Werthe, den man aus der Proportion erhält, verschieden?

Der Irrthum ist demnach $= \log \left(\frac{\sin (10m+n)''}{\sin 10m''}\right) - \frac{n}{10} \log \left(\frac{\sin (10m+10)''}{\sin 10m''}\right)$;

aber man hat: $\sin (10m+n)'' = \sin 10m'' \cos n'' + \sin n'' \cos 10m''$;

$\sin (10m+10)'' = \sin 10m'' \cos 10'' + \sin 10'' \cos 10m''$; und folglich:

$\frac{\sin (10m+n)''}{\sin 10m''} = \cos n'' + \frac{\sin n''}{\text{tang} 10m''} = \cos n'' \left\{1 + \frac{\text{tang} n''}{\text{tang} 10m''}\right\}$; ebenso

$\frac{\sin (10m+10)''}{\sin 10m''} = \cos 10'' \left(1 + \frac{\text{tang} 10''}{\text{tang} 10m''}\right)$.

Es ist aber $\cos n'' = 1 - \frac{n^2 \sin^2 1''}{2} + \frac{n^4 \sin^4 1''}{2.3.4}$, und weil $n<10$, also n'' immer sehr klein in Theilen des Radius ist, kann man alle Potenzen von $n \sin 1''$, welche über die zweite sind, im Vergleich mit den andern vernachlässigen und daher $\cos n'' = 1 - \frac{n^2 \sin^2 1''}{2}$ setzen.

Digitized by Google

Es wird dann $\log \cos n'' = -\frac{k n^2 \sin^2 1''}{2}$ (nach (10))

und $\log \cos 10'' = -\frac{100 \cdot k \sin^2 1''}{2}$.

Ferner ist $\log\left(1 + \frac{\tang n''}{\tang 10m''}\right) = \frac{k \tang n''}{\tang 10m''} - \frac{k \tang^2 n''}{2 \cdot \tang^2 10m''} + \ldots\ldots$ Nun kann man aber aus der vorhin angeführten Ursache auch hier die Potenzen von $n \sin 1''$, welche über die zweite sind, weglassen *), woher $\tang n'' = n \sin 1''$ (11), und

$\log\left(1 + \frac{\tang n''}{\tang 10m''}\right) = \frac{kn \sin 1''}{\tang 10m''} - \frac{kn^2 \sin^2 1''}{2 \cdot \tang^2 10m''}$ ist; ebenso hat man

$$\log\left(1 + \frac{\tang 10''}{\tang 10m''}\right) = \frac{10k \sin 1''}{\tang 10m''} - \frac{100k \sin^2 1''}{2 \tang^2 10m''}.$$

Man findet aus allen diesen Werthen:

$$\log . \frac{\sin (10m+n)''}{\sin 10m''} = \frac{kn \sin 1''}{\tang 10m''} - \frac{kn^2 \sin^2 1''}{2}\left\{1 + \frac{1}{\tang^2 10m''}\right\} = \frac{kn \sin 1''}{\tang 10m''} -$$

$\frac{kn^2 \sin^2 1''}{2 \sin^2 10m''}$; und $\frac{n}{10} \log \frac{\sin (10m+10)''}{\sin 10m''} = \frac{nk \sin 1''}{\tang 10m''} - \frac{10kn \sin^2 1''}{2 \sin^2 10m''}$. Der gesuchte Irrthum ist also: $\frac{k}{2} \frac{(n^2 - 10n) \sin^2 1''}{\sin^2 10m''}$; er ist negativ und sein positiver Werth beträgt $\frac{k}{2} \cdot \frac{n(10-n) \sin^2 1''}{\sin^2 10m''}$. Dieser Werth wird rücksichtlich auf n am größten, wenn $n = 5$ ist; dann ist er $= \frac{25k \sin^2 1''}{2 \cdot \sin^2 10m''}$, und wird auf die 7te Decimalstelle des Logarithmen Einfluß haben, wenn er $> 0{,}00000005$ ist. Fragt man nun, wie groß ohngefähr der Bogen $10m''$ seyn muß, wenn $\frac{25k \sin^2 1''}{2 \sin^2 10m''} = 0{,}00000005$ wird? so muß $\sin^2 10m'' = 25k \cdot \sin^2 1'' \cdot 10000000$ seyn, woher man $10m'' = 10440'' = 2°, 54'$ findet.

Wenn also die Tafeln durchaus von 10″ zu 10″ berechnet wären, so fände man die log sin der Bogen unter 3°, oder die log cos über 87° nicht mehr sicher mit 7 genauen Decimalstellen, wenn die Bogen nicht in den Tafeln unmittelbar ständen. Dasselbe kann man auch auf die log: tang: ausdehnen, indem bei kleinen Bogen, wie diejenigen, wovon hier

*) Dieses darf aber nur in der Unterstellung geschehen, daß $10m$ in Rücksicht gegen n noch immer sehr groß sei.

Digitized by Google

die Rede ist, die tang: beinahe mit den Sinus proportional sind. Aus diesen Gründen finden sich in den Tafeln die log: sin: und log: tang: für die ersten Grade von Secunde zu Secunde berechnet, und man kann also nur dann einen Irrthum in der 7ten Decimalstelle des Logarithmen befürchten, wenn die Theile von Secunden, welche sich im Bogen befinden können, denselben hervorbrächten. Durch eine ähnliche Rechnung, wie die obige, findet man, daß dieses für Bogen unter 16′ Statt haben könne.

23) Wir wollen nun die Frage des vorigen §. umkehren, und suchen, wie genau man einen Bogen durch den Logarithmen seines Sinus finden könne?

Der Irrthum kann in diesem Falle eine zweifache Quelle haben: entweder ist man von der Genauigkeit des gegebenen Logarithmen nicht ganz versichert, und dieses ist meistens der Fall; oder man kennt den Logarithmen ganz genau, und der Irrthum rührt von der Proportion her.

Was im ersten Falle am Bogen fehlen könne, wollen wir durch Differentialrechnung finden (18).

Es ist $d.\log\sin a = \frac{k.d.\sin a}{\sin a} = \frac{k\cos a.da}{\sin a} = \frac{k.da}{\tang a}$, und folglich $da = \frac{(d.\log\sin a).\tang a}{k}$; dieses ist da in Theilen des Radius *); um dasselbe in Secunden zu finden, muß man seinen Werth durch $\sin 1''$ dividiren (15), woher $da = \frac{(d.\log\sin a).\tang a}{k\sin 1''}$ wird. In letzterer Gleichung bedeutet $d.\log\sin a$ dasjenige, was am Logarithmen fehlen mag, und da die Anzahl Secunden, welche hierdurch im Bogen unsicher werden.

Nimmt man nun an, daß am log sin höchstens eine Einheit von der 7ten Decimalstelle fehle, so wird: $da = \frac{\tang a}{10000000\,k\sin 1''}$, welches ohngefähr $0'',05 . \tang a$ ist. Dieser Irrthum kann sehr beträchtlich werden, wenn a sich 90° nähert; er ist schon 1″, wenn $a = 87°,8'$ ist. Den Irrthum, welchen die Proportion hervorbringen kann, berechnen wir folgender Maßen: die Proportion ist: $\log\sin(10m+10)'' - \log\sin 10m'' : \log\sin(10m+n)'' - \log\sin 10m'' = 10 : n$. Aus dieser zieht man einen Werth für n, welcher von n

*) Jedesmal, wenn man für den Werth einer Linie eine abstracte Zahl findet, zeigt diese Theile des Radius an; denn der Radius ist hier das allgemeine Maaß.

Digitized by Google

verschieden ist, und dieser Unterschied ist der zu berechnende Irrthum; er beträgt also: $n - \frac{10 \log \frac{\sin(10m+n)''}{\sin 10m''}}{\log . \frac{\sin(10m+10)''}{\sin 10m''}}$. Wenn man (22) benutzt, so wird man bei einiger Aufmerksamkeit finden, daß der vorige Ausdruck gleich $-\frac{(10n-n^2)}{\sin 2 . 10m''} \sin 1''$, oder wenn man für $10m''$, a schreibt, $-\frac{(10n-n^2)}{\sin 2a} . \sin 1''$ ist. Rücksichtlich auf n wird dieser Ausdruck am größten, wenn $n=5$ ist; der Irrthum beträgt also höchstens $\frac{25 \sin 1''}{\sin 2a}$; er wird nur groß, wenn a entweder sehr klein, oder nahe bei 90° ist: sollte er 0″,01 ausmachen, so dürfte 2a kaum 42′ oder 180°—42′, also a höchstens 21′ oder wenigstens 90°—21′ seyn; beträgt aber der Bogen wirklich weniger als 21′, so wird der eben berechnete Irrthum aus der Ursache nicht Statt haben können, weil die Tafeln für so kleine Bogen von Secunde zu Secunde gehen; der Irrthum ist alsdann $-\frac{n(1-n)\sin 1''}{. \sin 2a}$, welches nur für Bogen unter 13″, 0″01 beträgt, und also höchstens nur für solche Bogen in Anschlag gebracht werden kann. Der Irrthum der Proportion ist also nur bei Bogen zwischen 90°—21′ und 90° bedeutend *).

24) Aus (22) und (23) geht hervor, daß der Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für solche Bogen, welche entweder sehr klein, oder von 90° wenig unterschieden sind, unsicher wird. Dieses ist zum Theil die Ursache, warum man statt der trigonometrischen Linien kleiner Bogen, die Bogen selbst in Rechnung bringt, welches mit Hülfe der Reihen aus (11) folgender Maaßen geschieht: wenn a die Anzahl Secunden eines kleinen Bogens bedeutet, so ist $a \sin 1''$ immer eine sehr kleine Zahl; man kann daher in diesem Falle in den Reihen: $\sin a = a \sin 1'' - \frac{a^3 \sin^3 1''}{2 . 3} + \ldots$,
$\cos a = 1 - \frac{a^2 \sin^2 1''}{2} + \ldots$, etc..., ohne merklichen Irrthum, alle Glieder, von einer

*) Die Beschaffenheit der Tafeln scheint diesem in soweit zu widersprechen, als die Differenzen der log sin: von Bogen, welche nicht weit von 90° sind, ziemlich gleich, und also mit den Differenzen der Bogen in Proportion zu seyn scheinen. Dieses ist aber deswegen, weil diese Differenzen alle sehr klein sind, und nur höchstens Einheiten von der 7ten Decimalstelle enthalten; da nun in den Tafeln die Einheiten der folgenden Stellen nicht stehen, so kann man aus denselben auch die Gleichheit der Differenzen nicht beurtheilen.

Digitized by Google

gewissen Potenz von a sin 1″ an gerechnet, vernachlässigen, und diese Potenz kann desto geringer seyn, je kleiner a ist. Man sieht also, wie es in diesem Falle möglich ist, anstatt der trigonometrischen Linie, eine algebraische Function des Bogens in Rechnung zu bringen.

Offenbar sind dergleichen Substitutionen nicht ganz genau; es ist daher nöthig, da wo solche gemacht worden sind, den Irrthum einigermaaßen zu berechnen, um sich zu versichern, daß derselbe unbedeutend sei.

25) Bogen, welche größer als 90° sind, findet man nicht in den Tafeln; man wird sich leicht durch folgende Formeln helfen: $\sin(90° + x) = \cos x$, $\cos(90° + x) = -\sin x$ $\tang(90° + x) = -\cot x$.

Zweites Kapitel.

Die Auflösung der geradlinigen Dreiecke im Allgemeinen und in besondern Fällen.

Formeln zur Auflösung d. geradlinigen Dreiecke im Allgemeinen.

26) (Siehe Fig. II.) In dem Dreiecke ABC sei AB = c, BC = a, AC = b. BO stehe auf AC senkrecht; so ist $BO = c \sin A$ und $BO = a \sin C$, also $c \sin A = a \sin C$ oder $a : c = \sin A : \sin C$; **also sind die Seiten des Dreieckes mit den Sinus der gegenüberstehenden Winkel in Proportion.**

27) Es ist $\overline{BO}^2 = a^2 - (b - AO)^2 = a^2 - b^2 - \overline{AO}^2 + 2b \cdot AO$, also: $\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2 = a^2 - b^2 + 2b \cdot AO$; nun ist $\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2 = c^2$ und $AO = c \cos A$, folglich $c^2 = a^2 - b^2 + 2bc \cos A$ oder $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

28) $b = AO + OC$, also: $b = c \cos A + a \cos C$.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich geradlinige Dreiecke in allen Fällen auflösen wie folgt.

29) **Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel sind gegeben, das Uebrige zu finden.**

c, b, A, sind gegeben; a, B, C, werden gesucht.

Aus (27) ist $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$; diese Formel ist aber zur Berechnung mit Logarithmen nicht tauglich, indem jedes Glied derselben besonders gesucht werden müßte. Um dieses zu vermeiden, setze man

Digitized by Google

$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A$, folglich $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc + 4bc\sin^2\frac{1}{2}A = (c-b)^2 + 4bc\sin^2\frac{1}{2}A =$
$= (c-b)^2\left(1 + \frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(c-b)^2}\right)$. Berechnet man nun einen Winkel Θ so, daß $\frac{4bc\sin^2\frac{1}{2}A}{(c-b)^2} =$
$= \tan g^2\Theta$ ist, so wird $a = \frac{c-b}{\cos\Theta}$.

30) Es sei $b = 4678{,}6$ met., $c = 5794{,}25$ met., $A = 68°, 15', 10''$; so wird die Rechnung geführt wie folgt:

1.

$\log 4 = 0{,}6020600$
$\log b = 3{,}6701159$
$\log c = 3{,}7629973$
$2\,l.\sin\frac{A}{2} = \bar{1}{,}4979572$
$-2\,l.(c-b) = \bar{7}{,}9049438$ *)
$2\,.\,l.\tan g\,\Theta = 1{,}4380742$
$l.\tan g\,\Theta = 0{,}7190371$
$\Theta = 79°, 11', 18'', 44.$

2.

$\log(c-b) = 3{,}0475281$
$-\log\cos\Theta = 0{,}7268153$
$\log a = 3{,}7743434$
$a = 5947{,}62$ met.

(Eine andere Anwendung siehe (218).)

Hat man nun a gefunden, so findet man die Winkel B, C, nach (26) durch die Gleichungen $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ und $\sin C = \frac{c\sin A}{a}$.

Man könnte glauben, daß, da zwei Nebenwinkel einerlei sinus haben, hier die Winkel B und C durch ihre sinus nicht genug bestimmt wären; wir können aber durch die Werthe von b und c sehen, welcher von den beiden Winkeln B und C der kleinere, und also nothwendig spitzig ist; es hat also hier keine Zweideutigkeit Statt.

Im gegenwärtigen Falle muß B spitzig seyn; um ihn zu finden ist die Rechnung folgende:

$\log b = 3{,}6701159$
$\log\sin A = \bar{1}{,}9679351$
$-\log a = \bar{4}{,}2256566$
$\log\sin B = \bar{1}{,}8637076$

also $\log\text{tab}\,.\sin B = 9{,}8637076$,
daher $B = 46°, 56', 26'', 43$;
nun ist $A = 68, 15, 10$
$A + B = 115°, 11', 36'', 43$;

*) Das Zeichen — ist über die Charakteristik des Log. geschrieben, weil diese allein negativ, der darauf folgende Dezimalbruch aber positiv ist. Um einen negativen Log. in dieser Form zu erhalten, suche man erst $10 - \log a$, und ziehe in dem Resultate 10 von der Charakteristik ab. Man erhält dann offenbar $-\log a$ und blos die Charakteristik wird negativ seyn. — Bei dem Sinus rührt die negative Charakteristik daher, daß man von dem log tab. noch 10 abziehen mußte.

Digitized by Google

zieht man A + B von 180° oder von 179°, 59′, 60″, 00 ab, so bleibt

$$C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 57.$$

Zur Verification suchen wir C wie B.

$$\left.\begin{array}{rl} \log c = & 5{,}7629973 \\ \log \sin A = & \bar{1}{,}9679351 \\ -\log a = & \bar{4}{,}2256566 \\ \hline \log \sin C = & \bar{1}{,}9565890 \end{array}\right\} C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 63.$$

Den unbedeutenden Unterschied von 0″,06 in den beiden Werthen von C muß man den Unrichtigkeiten, wovon in (19) und den folgenden §§. die Rede war, zuschreiben.

31) Die Winkel B und C soll man ohne vorläufige Berechnung von a finden.

Es ist $\sin B : \sin C = b : c$, daher $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{b+c}{b-c}$; aber nach (4) ist $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{\tang \frac{1}{2}(B+C)}{\tang \frac{1}{2}(B-C)}$, folglich $\tang \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(B+C) \cdot \frac{b-c}{b+c}$. Aber $B + C = 180° - A$; also $\frac{1}{2}(B+C) = 90° - \frac{A}{2}$, woher $\tang \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cdot \cot \frac{1}{2} A$.

Hat man nun durch diese Formel $\frac{B-C}{2}$ gefunden, so ist $B = \frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C)$, $C = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C)$. Je nachdem b größer oder kleiner als c ist, muß man in der Formel, b — c und B — C, oder c — b und C — B setzen; letzteres gilt in dem Beispiele von (30). Die Rechnung ist folgende:

$$\left.\begin{array}{rl} \log \tang \frac{B+C}{2} = \log \cot \frac{A}{2} = & 0{,}1689479 \\ \log (c-b) = & 3{,}0475281 \\ -\log (c+b) = & \bar{5}{,}9799351 \\ \hline \log \tang \left(\frac{C-B}{2}\right) = & \bar{1}{,}1964111 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{C+B}{2} = 55°,\ 52',\ 25'' \\ \frac{C-B}{2} = 8°,\ 55',\ 58'',\ 6 \\ \hline C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 6 \\ B = 46°,\ 56',\ 26'',\ 4 \end{array}$$

(Eine andere Anwendung in (218).) wie oben.

32) Wenn b, A, C gegeben sind, a, c, B zu finden.

Man hat: $B = 180° - (A + C)$, und $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$.

(Anwendung in (211).)

Digitized by Google

33) b, A, a sind gegeben, das Uebrige zu finden.

Man findet sogleich: $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, $C = 180° - (A+B)$ und $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$. Wenn $b > a$, so ist auch $B > A$; man kann dann nicht wissen, ob B spitzig oder stumpf sei; in diesem Falle ist die Aufgabe nicht ganz bestimmt: wenn aber $a > b$, folglich auch $A > B$ ist, so muß B spitzig seyn.

34) Durch die drei Seiten a, b, c die drei Winkel A, B, C zu bestimmen.

Es ist $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$, $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$ ist. Um diese Formel zur Rechnuug durch Logarithmen gemächlich einzurichten, setze man $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, woher $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$. Der Zähler dieses Werthes läßt sich in Factoren zerlegen, und es wird $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}$; hätte man $\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1$ genommen, so würde man auf eine ähnliche Weise wie eben $\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$ gefunden haben. Wenn man $\frac{b+c+a}{2} = S$ setzt, so ist $b + c - a = 2(S-a)$, $(a+b-c) = 2(S-c)$ und $(a+c-b) = 2(S-b)$; mithin $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$, $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$. Man hat auch

$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2}{bc} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$. So findet man auch B und C.

35) Als Anwendung dieser Formeln, nehmen wir aus dem früheren Beispiele: $a = 5947{,}62^{\text{met.}}$; $b = 4678{,}6^{\text{met.}}$; $c = 5794{,}25^{\text{met.}}$; wir wollen A suchen.

$a + b + c = 2S = 16420{,}47$, $S = 8210{,}235$.

$S - b = 3531{,}635$, $S - c = 2415{,}985$.

$\log (S-b) = 3{,}5479758$

$\log (S-c) = 3{,}3830943$

$-\log b = \bar{4}{,}3298841$

$-\log c = \bar{4}{,}2370027$

$2 \log \sin \frac{A}{2} = \bar{1}{,}4979569$

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1}{,}7489784$

$\frac{1}{2} A$ muß nothwendig spitzig seyn, weil $A < 180°$ ist, also:

$\frac{A}{2} = 34°, 7', 35''$

$A = 68°, 15', 10''$ wie oben.

(Eine Anwendung der letzten Formel in (34) siehe (217).)

Digitized by Google

zieht man A + B von 180° oder von 179°, 59′, 60″, 00 ab, so bleibt

$$C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 57.$$

Zur Verification suchen wir C wie B.

$$\left.\begin{array}{r} \log c = \bar{3},7629973 \\ \log \sin A = \bar{1},9679351 \\ -\log a = \bar{4},2256566 \\ \hline \log \sin C = \bar{1},9565890 \end{array}\right\} C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 63.$$

Den unbedeutenden Unterschied von 0″,06 in den beiden Werthen von C muß man den Unrichtigkeiten, wovon in (19) und den folgenden §§. die Rede war, zuschreiben.

31) Die Winkel B und C soll man ohne vorläufige Berechnung von a finden.

Es ist $\sin B : \sin C = b : c$, daher $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{b+c}{b-c}$; aber nach (4) ist $\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{\tang \frac{1}{2}(B+C)}{\tang \frac{1}{2}(B-C)}$, folglich $\tang \frac{1}{2}(B-C) = \tang \frac{1}{2}(B+C) \cdot \frac{b-c}{b+c}$. Aber $B + C = 180° - A$; also $\frac{1}{2}(B+C) = 90° - \frac{A}{2}$, woher $\tang \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cdot \cot . \frac{1}{2} A$. Hat man nun durch diese Formel $\frac{B-C}{2}$ gefunden, so ist $B = \frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C)$, $C = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C)$. Je nachdem b größer oder kleiner als c ist, muß man in der Formel, b—c und B—C, oder c—b und C—B setzen; letzteres gilt in dem Beispiele von (30). Die Rechnung ist folgende:

$$\left.\begin{array}{r} \log \tang \frac{B+C}{2} = \log \cot \frac{A}{2} = 0,1689479 \\ \log (c-b) = 3,0475281 \\ -\log (c+b) = \bar{5},9799351 \\ \hline \log \tang \left(\frac{C-B}{2}\right) = \bar{1},1964111 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{C+B}{2} = 55°,\ 52',\ 25'' \\ \frac{C-B}{2} = 8°,\ 55',\ 58'',\ 6 \\ \hline C = 64°,\ 48',\ 23'',\ 6 \\ B = 46°,\ 56',\ 26'',\ 4 \end{array}$$

(Eine andere Anwendung in (218).) wie oben.

32) Wenn b, A, C gegeben sind, a, c, B zu finden.

Man hat: $B = 180° - (A + C)$, und $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$.

(Anwendung in (211).)

Digitized by Google

33) b, A, a sind gegeben, das Uebrige zu finden.

Man findet sogleich: $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, $C = 180° - (A+B)$ und $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$. Wenn $b > a$, so ist auch $B > A$; man kann dann nicht wissen, ob B spitzig oder stumpf sei; in diesem Falle ist die Aufgabe nicht ganz bestimmt: wenn aber $a > b$, folglich auch $A > B$ ist, so muß B spitzig seyn.

34) Durch die drei Seiten a, b, c die drei Winkel A, B, C zu bestimmen.

Es ist $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$, $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$ ist. Um diese Formel zur Rechnung durch Logarithmen gemächlich einzurichten, setze man $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, woher $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$. Der Zähler dieses Werthes läßt sich in Factoren zerlegen, und es wird $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}$; hätte man $\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1$ genommen, so würde man auf eine ähnliche Weise wie eben $\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$ gefunden haben. Wenn man $\frac{b+c+a}{2} = S$ setzt, so ist $b+c-a = 2(S-a)$, $(a+b-c) = 2(S-c)$ und $(a+c-b) = 2(S-b)$; mithin $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$, $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$. Man hat auch $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2}{bc} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$. So findet man auch B und C.

35) Als Anwendung dieser Formeln, nehmen wir aus dem früheren Beispiele: $a = 5947{,}62^{\text{met.}}$; $b = 4678{,}6^{\text{met.}}$; $c = 5794{,}25^{\text{met.}}$; wir wollen A suchen.

$a + b + c = 2S = 16420{,}47$, $S = 8210{,}235$.

$S - b = 3531{,}635$, $S - c = 2415{,}985$.

$\log (S-b) = 3{,}5479758$

$\log (S-c) = 3{,}3830943$

$-\log b = \bar{4}{,}3298841$

$-\log c = \bar{4}{,}2370027$

$2 \log \sin \frac{A}{2} = \bar{1}{,}4979569$

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1}{,}7489784$

$\frac{1}{2} A$ muß nothwendig spitzig seyn, weil $A < 180°$ ist, also:

$\frac{A}{2} = 34°, 7', 35''$

$A = 68°, 15', 10''$ wie oben.

(Eine Anwendung der letzten Formel in (34) siehe (217).)

Digitized by Google

36) Den Inhalt eines Dreieckes zu berechnen.

a) Wenn zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

Fig. II. ist $BO = c \sin A$; also Inhalt $= \frac{b c \sin A}{2}$.

b) Wenn drei Seiten gegeben sind: nach (34) ist

$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$, also nach (a) Inhalt $= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$.

c) Wenn eine Seite mit den daran liegenden Winkeln gegeben ist: man hat

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{b \sin C}{\sin (A+C)}, \text{ also Inhalt} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin (A+C)}.$$

Anwendung der vorhergehenden Formeln bei besondern Fällen.

37) Wenn ein Winkel in dem gegebenen Dreiecke sehr spitzig ist, so findet man denselben durch seine trigonometrischen Linien nicht immer mit hinreichender Genauigkeit. Man muß dann suchen den Winkel direct zu berechnen.

Gesetzt man habe $\cos A = p$ gefunden, wo A ein sehr kleiner Bogen ist; dann wird p von 1 wenig verschieden seyn. Wenn man nun beachtet, daß dieser cos: dem Sinus eines Bogens, welcher von 90° wenig abweicht, gleich ist, so hat man, wenn man A durch den gefundenen log cos: in den Tafeln suchen wollte, die beiden Irrthümer, welche in (23) berechnet sind, zu befürchten; man erhält daher A genauer auf folgendem Wege:

A sei in Secunden ausgedrückt, so ist beinahe:

$$\cos A = 1 - \frac{A^2 \sin^2 1''}{2} = p, \text{ also:}$$

$$A^2 \sin^2 1'' = 2(1-p),\ A^2 = \frac{2(1-p)}{\sin^2 1''},\ A = \frac{\sqrt{2(1-p)}}{\sin 1''}.$$

Um die Größe, welche hier vernachläßigt wird, zu finden, berechnen wir den Werth, welchen man für A gefunden hätte, wenn man noch die 4ten Potenzen von $A \sin 1''$ beibehalten hätte; denn der Einfluß der sechsten und folgenden Potenzen, kann gegen den der 4ten nur unbedeutend seyn.

Man setze also: $1 - \frac{A^2 \sin^2 1''}{2} + \frac{A^4 \sin^4 1''}{2.3.4} = p$, so ist:

$$\frac{A^2 \sin^2 1''}{2}\left(1 - \frac{A^2 \sin^2 1''}{3.4}\right) = 1-p, \text{ mithin } \frac{A^2 \sin^2 1''}{2} = \frac{1-p}{1 - \frac{A^2 \sin^2 1''}{3.4}} =$$

$$= (1-p)\left(1 - \frac{A^2 \sin^2 1''}{3.4}\right)^{-1};$$ wenn wir nun bemerken, daß $(1-p)$ von der nämlichen

Digitized by Google

Ordnung wie $A^2 \sin^2 1''$ ist, so wird $\frac{A^2 \sin^2 1''}{2} = (1-p)\left(1 + \frac{2(1-p)}{3.4}\right)$, woher:

$$A = \frac{\sqrt{2(1-p)}}{\sin 1''}\left(1 + \frac{2(1-p)}{3.4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2(1-p)}}{\sin 1''}\left(1 + \frac{(1-p)}{3.4}\right).$$

Das vorhin Vernachläßigte ist also: $\frac{\sqrt{2(1-p)^3}}{3.4.\sin 1''}$; um dieses zu schätzen, kann man in demselben $(1-p) = \frac{A^2 \sin^2 1''}{2}$ setzen, indem man dadurch nur Glieder, worin $A^6 \sin^6 1''$ ist, wegläßt; demnach wird das Gesuchte gleich $\frac{A^3 \sin^3 1''}{2.3.4.\sin 1''}$ oder $\frac{A^3 \sin^2 1''}{2.3.4}$; soll dieses $0'',01$ betragen, so muß $A^2 = \frac{24}{100.\sin^2 1''}$ seyn; nun ist:

$$\left.\begin{array}{rl} \log 24 = & 1,38021 \\ -\log 100 = & 2,00000 \\ -2\log \sin 1'' = & 10,62886 \\ \hline 3\log A = & 10,00907 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \log A = 3,33636 \\ A = 2169'' = 36',9'' \end{array}$$

Wenn also p genau gleich cos A ist, so findet man durch die oben angegebene Rechnung, alle Bogen unter $36'$ bis auf $0'',01$ genau.

Wir wollen nun untersuchen, in wie weit wir die Irrthümer aus (23) vermieden haben. Der erste hängt von einer Unrichtigkeit in p ab; in so fern diese wirklich da ist, behält sie fast ihren ganzen Einfluß auf A, wie aus den folgenden §§. deutlicher erhellen wird; diesem Irrthum wird also hier nicht ausgewichen.

Der zweite Irrthum ist für Bogen über $21'$ nicht achtbar; er verschwindet also, wenn man dieselben nach der hier vorgetragenen Methode berechnet, indem diese die Bogen bis $36'$ auf $0'',01$ genau giebt.

38) Wenn für den sehr kleinen Bogen A, $\sin A = p$ ist, so wird p sehr klein seyn; will man dann A aus den Tafeln finden, so hat man den zweiten Irrthum in (23) nur dann zu befürchten, wenn A unter $13''$ ist; aber dann läßt sich auch $\sin A = A \sin 1''$ setzen, weil, so weit die Tafeln gehen, $\sin 13'' = \tang 13''$ und also $\sin 13'' = \bog 13''$ ist; man hat also für diesen Fall $A = \frac{p}{\sin 1''}$.

Dasselbe gilt auch, wenn $\tang A = p$ gewesen wäre, und zwar aus dem nämlichen Grunde wie vorhin.

Digitized by Google

Eine Unrichtigkeit in p hat hier bei weitem nicht den Einfluß auf A, wie in dem Falle des vorigen §; denn wenn diese Unrichtigkeit dp ist, so ist hier $dA = \frac{dp}{\sin 1''}$; hingegen im vorigen §. $dA = \frac{-dp}{A \sin^2 1''}$, weil $A^2 = \frac{2(1-p)}{\sin^2 1''}$ ist. Das zweite dA ist also gleich dem ersten durch $A \sin 1''$ dividirt; nun ist aber $A \sin 1''$ im gegenwärtigen Falle immer sehr klein, also das zweite dA viel größer als das erste. Es ergiebt sich daraus, daß man kleine Bogen durch ihre Sinus oder Tangenten zu bestimmen suchen muß, und dieses zeigt, welche Formeln man in den verschiedenen Fällen brauchen soll, um den spitzigen Winkel des Dreieckes zu berechnen.

39) Eine Anwendung der beiden vorhergehenden §§. sei folgendes Beispiel: $a = 25$ met., $b = 4700$ met., $c = 4689$ met.; den Winkel A zu berechnen. Hier finden wir A am genauesten durch seinen Sinus, wenn wir die Formel $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$ nehmen.

Wir finden $\log \text{tab} \sin \frac{A}{2} = 7{,}5785962$, $\frac{A}{2} = 8', 13'', 193$. Dieser Winkel ist von der Art, daß ein kleiner Irrthum im $\log \sin \frac{A}{2}$ keinen Einfluß auf $\frac{A}{2}$ haben kann, wie aus (23) hervorgeht.

Es war hier nicht nöthig den Winkel $\frac{A}{2}$ direct zu berechnen, weil er größer als 13'' ist.

Wir wollen nun suchen den Winkel $\frac{A}{2}$ durch seinen Cosinus zu bestimmen, um zu zeigen, wie unrathsam dieses sei.

Aus der Formel $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$ finden wir: $\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1}{,}9999987$, woher $\frac{A}{2} = 8', 20''$ oder $8', 30''$; der Gebrauch der Tafeln wird also hier vollends unzuverläßig, und der Irrthum kann bis auf 17'' gehen; derjenige, welchen die Proportion hervorbringt, ist höchstens $\frac{25 \sin 1''}{\sin A}$ (23) also hier höchstens $0'', 02$; der große vorige kann also blos von einer Unsicherheit im $\log \cos \frac{A}{2}$ herkommen; wir haben daher keine Hoffnung diesen Irrthum im gegenwärtigen Falle durch die directe Berechnung von $\frac{A}{2}$ zu vermeiden, wie sich auch aus Folgendem ergeben wird.

Digitized by Google

Es ist $\log p = \bar{1},9999987$, $p = 0,9999969$, $1-p = 0,0000031$; $\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(1-p)}{\sin^2 1''}}$, woher $\log\frac{A}{2} = 2,7106209$, $\frac{A}{2} = 513'',595$, welches vom genauen Werthe von $\frac{A}{2}$ um $20''$ verschieden ist. Es ist auffallend, daß eine kleine Unrichtigkeit im $\log\cos\frac{A}{2}$ eine so große Verschiedenheit hervorbringen könne; aber nach (23) bringt ein Irrthum von 0,0000001 im $\log\cos\frac{A}{2}$, welcher doch leicht hier Statt haben kann, einen gleich $\frac{\cot\frac{A}{2}}{10000000\,k\sin 1''}$ im Bogen hervor. Berechnet man diese Größe, so findet man den Irrthum $= 20''$ wie oben.

40) In dem gegebenen Dreiecke sei der Winkel A sehr stumpf, folglich B und C sehr spitzig: man soll die Seite a berechnen.

Man nehme die Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, und setze $A = 180° - \delta$, wo also δ sehr klein ist. Es wird dann $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\delta$. Wenn nun δ klein genug und in Secunden ausgedrückt ist, so kann man $\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2\sin^2 1''}{2}$ setzen. Dann wird:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - \frac{2bc\delta^2\sin^2 1''}{2} = (b+c)^2\left\{1 - \frac{bc.\delta^2\sin^2 1''}{(b+c)^2}\right\},$$

$a = (b+c)\left(1 - \frac{bc\delta^2\sin^2 1''}{(b+c)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; dieses entwickeln wir, und behalten blos die zweite Potenz von $\delta\sin 1''$ und keine höhere bei, so wird $a = (b+c) - \frac{bc\delta^2\sin^2 1''}{2(b+c)}$.

Um nun zu finden, was hier vernachläßigt wurde, machen wir die Rechnung noch einmal, indem wir die 4te Potenz von $\delta\sin 1''$ beibehalten, dann ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - bc.\delta^2\sin^2 1'' + \frac{bc\delta^4\sin^4 1''}{3.4}$$

$$a^2 = (b+c)^2\left\{1 - \frac{bc\delta^2\sin^2 1''}{(b+c)^2} + \frac{bc\delta^4\sin^4 1''}{3.4.(b+c)^2}\right\}$$

$a = (b+c)\left\{1 - \frac{bc\delta^2\sin^2 1''}{2(b+c)^2} + \frac{bc\delta^4\sin^4 1''(b^3+c^3)}{2.3.4.(b+c)^5}\right\}$; das Vernachläßigte ist also: $\frac{bc\delta^4\sin^4 1''(b^3+c^3)}{2.3.4.(b+c)^4}$, welches durch Logarithmen in zwei Theilen berechnet werden muß.

Digitized by Google

Zur Anwendung der vorigen Formel sey $b = \overset{\text{met.}}{200}$, $c = \overset{\text{met.}}{9000}$, $A = 179°, 58', 10''$; mithin $180° - A = 1', 50'' = 110''$, also $\delta = 110''$.

Man braucht den Ausdruck $\frac{bc \cdot \delta^2 \sin^2 1''}{2(b+c)}$ nur mit Logarithmen von fünf Decimalstellen zu berechnen, weil es hinreichend ist die ersten Ziffer desselben genau zu kennen.

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} 2\log\delta &= \bar{4},08279 \\ 2\log\sin 1'' &= 11,57115 \\ \log b &= 2,30103 \\ \log c &= 3,95424 \\ -\log(b+c) &= \bar{4},03621 \\ -\log 2 &= \bar{1},69897 \\ & \overline{5},44439 \end{aligned}\right\} \quad \text{also } \frac{bc}{2(b+c)}(\delta \sin 1'')^2 = 0,0000278$$

$$b + c = 9200$$

$$\text{also } a = \overset{\text{met.}}{9199,9999722}.$$

Man findet hier den Werth von a mit 11 zuverläßigen Ziffern, welches nie geschehen wäre, wenn man den log a berechnet hätte. Jedoch ist auch hier zu bemerken, daß die 11 Ziffer nur dann als ganz genau betrachtet werden dürfen, wenn man sich versichert hat, daß das Vernachläßigte (40) keinen Einfluß auf dieselben haben kann.

42) Wenn b, c, A gegeben sind, soll man einen der spitzigen Winkel B oder C direct berechnen.

$\sin B : \sin C = b : c$, $C = 180° - (B + A)$, also

$\sin B : \sin(B + A) = b : c$ oder

$\sin B : \sin A \cos B + \sin B \cos A = b : c$ woher

$\tan g B : \sin A + \tan g B \cos A = b : c$; setzt man $\frac{b}{c} = m$, so ist

$$\tan g B = \frac{m \sin A}{1 - m \cos A}.$$ Es sei $A = 180° - \delta$; so ist

$$\tan g B = \frac{m \sin \delta}{1 + m \cos \delta}.$$

Wir wollen nun B und δ klein genug annehmen, um $\tan g B = B \sin 1'' + \frac{B^3 \sin^3 1''}{3}$, $\sin \delta = \delta \sin 1'' - \frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2 \cdot 3}$ und $\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2 \sin^2 1''}{2}$ zu setzen, so, daß man alle Glieder, wo $\sin 1''$ eine höhere Potenz als die dritte hat, meglassen könne; dann ist:

$$B \sin 1'' + \frac{B^3 \sin^3 1''}{3} = \frac{m\left(\delta \sin 1'' - \frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2 \cdot 3}\right)}{1 + m - \frac{m \delta^2 \sin^2 1''}{2}} = \frac{m}{1+m}\left\{\frac{\delta \sin 1'' - \frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2 \cdot 3}}{1 - \frac{m}{1+m}\frac{\delta^2 \sin^2 1''}{2}}\right\} =$$

Digitized by Google

$$= \frac{m}{1+m}\left\{\delta \sin 1'' - \frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2.3}\right\}\left\{1 + \frac{m}{m+1}\frac{\delta^2 \sin^2 1''}{2}\right\} =$$

$$= \frac{m}{1+m}\left\{\delta \sin 1'' + \frac{m}{1+m}\cdot\frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2} - \frac{\delta^3 \sin^3 1''}{2.3}\right\} = \frac{m}{1+m}\left\{\delta \sin 1'' + \frac{2m-1}{6(m+1)}\delta^3 \sin^3 1''\right\};$$

diesen Ausdruck nennen wir für einen Augenblick R; so ist $B \sin 1'' + \frac{B^3 \sin^3 1''}{3} = R$;

$$B \sin 1'' = R - \frac{B^3 \sin^3 1''}{3}.$$

Da nun $B \sin 1''$ und R von der nämlichen Ordnung sind, so ist leicht zu sehen, daß man hier $B^3 \sin^3 1'' = R^3 \sin 1''$ nehmen darf, woher $B \sin 1'' = R - \frac{R^3}{3}$ wird; aber R^3 ist hier gleich $\frac{m^3}{(1+m)^3}\delta^3 \sin^3 1''$; folglich:

$$B \sin 1'' = \frac{m}{1+m}\left\{\delta \sin 1'' + \frac{m-1}{6(m+1)^2}\delta^3 \sin^3 1''\right\} \text{ unendlich}$$

$$B = \frac{m}{1+m}\cdot\delta + \frac{m(m-1)}{6(1+m)^3}\cdot\delta^3 \sin^2 1''$$

Wenn δ sehr klein ist, so kann man $B = \frac{m}{1+m}\cdot\delta$ setzen; dasjenige, was man dann vernachläßigt, ist $\frac{m(m-1)}{6(1+m)^3}\cdot\delta^3 \sin^2 1''$.

43) Wenn m klein ist, so läßt sich B durch eine Reihe finden, welche nach den Potenzen von m geordnet ist; da dieselbe in der Folge sehr brauchbar seyn wird, so wollen wir sie herleiten.

$\tang B = \frac{m \sin A}{1 - m \cos A}$; nun ist nach (14) $\cos A = \frac{e^{A\sqrt{-1}} + e^{-A\sqrt{-1}}}{2}$,

$\sin A = \frac{e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; also $\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}(e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}})} =$

$$= \frac{m(e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}\left(1 - m\left(\frac{e^{A\sqrt{-1}} + e^{-A\sqrt{-1}}}{2}\right)\right)};$$ multiplicirt man auf der linken Seite alles mit

$e^{B\sqrt{-1}}$, so wird:

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1} = \frac{m(e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}})}{1 - me^{A\sqrt{-1}} + 1 - me^{-A\sqrt{-1}}};$$ setzt man $e^{2B\sqrt{-1}} = \alpha$, $1 - me^{A\sqrt{-1}} = \beta$,

Digitized by Google

$1-me^{-A\sqrt{-1}}=\gamma$, so ist $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}$, woher $\alpha=\frac{\gamma}{\beta}$ oder $e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{1-me^{-A\sqrt{-1}}}{1-me^{A\sqrt{-1}}}$;

nimmt man nun beiderseits die neperischen Logarithmen, und entwickelt dieselben auf der rechten Seite in Reihen, so ist $2B\sqrt{-1}=\text{neplog}(1-me^{-A\sqrt{-1}})-\text{neplog}(1-me^{A\sqrt{-1}})=$

$$=-me^{-A\sqrt{-1}}-\frac{m^2}{2}e^{-2A\sqrt{-1}}-\frac{m^3}{3}e^{-3A\sqrt{-1}}-\ldots\ldots+$$

$$+me^{A\sqrt{-1}}+\frac{m^2}{2}e^{2A\sqrt{-1}}+\frac{m^3}{3}e^{3A\sqrt{-1}}+\ldots\ldots \text{ und folglich}$$

$$B=m\left(\frac{e^{A\sqrt{-1}}-e^{-A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)+\frac{m^2}{2}\left(\frac{e^{2A\sqrt{-1}}-e^{-2A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)+\ldots.$$

oder $B=m\sin A+\frac{m^2}{2}\sin 2A+\frac{m^3}{3}\sin 3A+\ldots.$, welche die angekündigte Reihe ist.

44) In dem Beispiel aus (41) kann man diese Reihe anwenden, da $m=\frac{1}{45}$; nichts desto weniger ist es schon nöthig zwei Glieder derselben zu berechnen.

Man hat $\sin A=\sin(1',50'')$; $\sin 2A=-\sin(360°-2A)=-\sin(3',40'')$; das zweite Glied der Reihe ist also hier negativ und muß vom ersten abgezogen werden.

Man findet das 1te Glied $=2'',444$, das 2te $=0'',054$, also $B=2'',39$.

45) Viel leichter hätte man B nach (42) gefunden; denn nach der dortigen Formel ist $B=\frac{\delta}{46}=\frac{110''}{46}=2'',39$ wie oben. Das Vernachläßigte ist ganz unbedeutend.

46) (Siehe Fig. III) In dem Vierecke ACBD sind $CB=a$, $CA=b$, der Winkel C und die Winkel α, β gegeben; man soll die Winkel x, y, bestimmen.

Es ist $C+\alpha+\beta+x+y=360°$ also $x+y=360°-C-\alpha-\beta$

$CD:\sin x=b:\sin\alpha$
$CD:\sin y=a:\sin\beta$, daher $\frac{b\sin x}{\sin\alpha}=\frac{a\sin y}{\sin\beta}$, woraus $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta}$ und $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=$

$=\frac{\tan g\frac{1}{2}(x+y)}{\tan g\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{a\sin\alpha+b\sin\beta}{a\sin\alpha-b\sin\beta}$ also: $(\tan g\frac{1}{2}(x-y)=\tan g\frac{1}{2}(x+y)\left\{\frac{a\sin\alpha-b\sin\beta}{a\sin\alpha+b\sin\beta}\right\}$;

da nun $(x+y)$ bekannt ist, so findet man $(x-y)$ und folglich x und y.

Die vorhergehende Formel ist zur Berechnung durch Logarithmen folgendermaßen gemächlich zu machen: man schreibe,

$$\tan g\tfrac{1}{2}(x-y)=\tan g\tfrac{1}{2}(x+y)\left\{\frac{1-\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}}{1+\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}}\right\} \text{ und setze } \frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}=\tan g\,\Theta, \text{ so ist, weil}$$

Digitized by Google

tang 45° = 1 ist, $\text{tang}\frac{1}{2}(x-y) = \text{tang}\frac{1}{2}(x+y)\left\{\frac{\text{tang}45° - \text{tang}\Theta}{1 + \text{tang}45°\,\text{tang}\Theta}\right\} =$
$= \text{tang}\frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{tang}(45° - \Theta)$. Wenn $\Theta > 45°$ ist, so hat man $\text{tang}\frac{1}{2}(y-x) =$
$= \text{tang}\frac{1}{2}(x+y).\text{tang}(\Theta - 45°)$.

Wenn in einem besondern Falle $x+y = 180°$ wäre, so hätte man $\sin x = \sin y$ und folglich $b\sin\beta = a\sin\alpha$ oder $\Theta = 45°$. Dann würde unsere Formel $\text{tang}\frac{1}{2}(y-x) = \frac{0}{0}$ geben, und die Aufgabe wäre unbestimmt, wovon man sich auch leicht durch geometrische Gründe überzeugt. Wenn $x+y$ nahe an 180° kömmt, so werden die Winkel x und y sehr unsicher; denn der kleinste Irrthum im Werthe von Θ kann sehr bedeutend werden, indem tang (Θ—45°) mit der sehr großen $\text{tang}\frac{1}{2}(y+x)$ multiplizirt wird. (Anwendung (220.))

Drittes Kapitel.

Die Auflösung der sphärischen Dreiecke im Allgemeinen und in besondern Fällen.

47) Wir betrachten hier nur solche sphärische Dreiecke, welche durch drei Bogen von größten Kreisen gebildet werden. Diese Dreiecke sind nur dann vollkommen bestimmt, wenn man den Radius der Kugel kennt, worauf sie gezeichnet sind. Eigenschaften der sphärischen Dreiecke und Auflösung derselben im Allgemeinen.

Die Seiten der sphärischen Dreiecke werden wie andere Bogen, entweder in Graden, Minuten und Secunden, oder in Theilen des Radius in Rechnung gebracht.

Wenn es nicht ausdrücklich anders bedungen ist, so nimmt man den Radius der Kugel als Einheit an, und die Seiten sind alsdann immer in Theilen des Radius oder in Graden ꝛc. gegeben. Ist dieses der Fall nicht, so können die Seiten in Längenmaaß bestimmt seyn, und man erhält sie in Theilen des Radius, wenn man sie durch denselben dividirt. Wenn demnach a eine Seite und R der Radius ist, so bedeutet $\frac{a}{R}$ die Seite in Theilen des Radius, und $\frac{a}{R \sin 1''}$ dieselbe in Secunden.

48) Wenn man aus dem Centrum der Kugel nach den Spitzen des sphärischen Dreieckes Radien zieht, so entsteht ein dreiseitiger körperlicher Winkel, und die geradlinigen Winkel, welche denselben bilden, haben die Seiten des sphärischen Dreieckes zum Maaße. Da nun diese geradlinigen Winkel immer zusammen weniger als 4 Rechte betragen, so machen

Digitized by Google

auch drei Seiten eines sphärischen Dreieckes immer weniger als 4 Rechte. Die Winkel, welche die Ebenen, die den körperlichen Winkel bilden, miteinander machen, können als Maaß der Winkel des sphärischen Dreieckes angenommen werden.

49) Es läßt sich ein sphärisches Dreieck beschreiben, dessen Winkel von den Seiten, und dessen Seiten von den Winkeln eines andern gegebenen Dreieckes so abhängen, daß alle Beziehungen zwischen den Seiten des ersten Dreieckes sogleich auf andere zwischen den Winkeln des zweiten führen, und umgekehrt; um dieses Dreieck zu bilden und seine Eigenschaften zu finden, sei vorläufig das Folgende: (Siehe Fig. IV.)

AC sei die Seite eines Dreieckes; man nehme $AI = 90°$, und drehe den Kreis AI um AO herum, so beschreibt I einen größten Kreis MI, dessen Pol A ist; ebenso nehme man $CI' = 90°$ und beschreibe MI'. Dann machen die so beschriebenen Kreise gegen AC hin einen Winkel miteinander, welcher $= 180° - AC$ ist, weil von den Linien AO und CO jede auf einer der Ebenen der Kreise MI und MI' senkrecht steht und $AOC = AC$ ist.

Ferner bemerken wir noch, daß $MI = 90°$ ist, weil jede von den Ebenen MI, MI' auf der Ebene AOC, und folglich ihre Durchschnittslinie MO auf OI senkrecht steht.

50) Nun sei ACB (Fig. V.) jedes mögliche sphärische Dreieck; man beschreibe aus den Puncten A, B, C nach der im vorigen §. angegebenen Art, die größten Kreise C'B', A'C', A'B', so, daß: $BF = BG = 90°$, $AK = AL = 90°$ und $CH = CI = 90°$ sei: dann wird man ein neues sphärisches Dreieck A'B'C' erhalten, von dessen Seiten die Puncte A, B, C die Pole sind und welches deshalb das Polardreieck von ABC heißt.

Aus dem vorigen §. folgt nun unmittelbar, daß: W. $A' = 180° - CB$, $B' = 180° - AC$, $C' = 180° - AB$ ist; ferner, daß C'L, KB', B'H, IA', A'G, FC' alle 90° sind.

Aus Letzterem aber ergiebt sich, daß $C'B' = 180° - KL$, und weil KL das Maaß von A ist, daß $C'B' = 180° - A$ ist; ebenso muß $A'C' = 180° - B$, $A'B' = 180° - C$ seyn.

51) Nach (48) machen $A'B' + C'B' + A'C'$ weniger als 4 Rechte, mithin sind nach (50) 6 Rechte $- A - B - C < 4$ Rechte, oder $A + B + C > 2$ Rechte.

Also beträgt die Summe der Winkel eines sphärischen Dreieckes immer mehr als 180°; dasjenige, was sie darüber ausmacht, nennt man den sphärischen Ueberschuß.

51) bis. Wenn man die Fig. V. genau betrachtet, so sieht man leicht, daß das Dreieck ACB auch das Polardreieck von A'B'C' ist, indem die Bogen A'G etc. .... 90°

Digitized by Google

halten. Daraus folgt, daß jedes mögliche Dreieck als Polardreieck eines anderen angesehen werden kann.

52) ACB (Fig. VI) sei ein sphärisches Dreieck auf der Kugel, deren Radius 1 ist. Die Seiten desselben nenne man mit den kleinen Buchstaben der gegenüberstehenden Winkel. AD, AE seien Tangenten an AC und AB, so, daß EAD = A ist; O ist das Centrum der Kugel.

Dann ist AD = tang b, AE = tang c, OD = sec b, OE = sec c. In den Dreiecken DAE und DOE ist:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\,AD \times AE \,.\, \cos A$$
$$\overline{DE}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{OE}^2 - 2\,DO \times OE \,.\, \cos a$$

oder: $DE^2 = \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \tan b \,.\, \tan c \cos A$

$$DE^2 = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \,.\, \sec c \,.\, \cos a;$$

zieht man die obere Gleichung von der untern ab, so wird:

$$o = 2 + \frac{2 \sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c}, \text{ woraus:}$$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$; und ebenso ist

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$;

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

53) In Fig. VII. ist D das Centrum der Kugel und ABC ein sphärisches Dreieck; die Linien DC, DA, DB bilden einen dreiseitigen körperlichen Winkel; EO steht auf der Ebene MDS, OM und OS auf DM und DS, folglich auch EM und ES auf DM und DS, senkrecht.

Dann ist nach (48), a = CDB, b = CDA, A = EMO, B = ESO. Nun ist $\sin ESO = \frac{EO}{ES}$, $\sin EMO = \frac{EO}{EM}$ und $ES = ED \sin a$, $EM = ED \sin b$. Hieraus folgt, daß $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{EM}{ES} = \frac{\sin b}{\sin a}$; woraus man sieht, daß in einem sphärischen Dreiecke die sinus der Winkel sich verhalten wie die sinus der gegenüberstehenden Seiten.

Dasjenige, was wir in diesem und dem vorigen §. gesagt haben, ist mehr als hinreichend, um alle sphärische Dreiecke aufzulösen. Wir wollen jetzt für die einzelnen Fälle die nöthigen Formeln aufstellen, und dabei mit den rechtwinkeligen Dreiecken anfangen.

Digitized by Google

54) A sei der rechte Winkel; b, c sind gegeben; das Uebrige zu finden.

Aus (52) wird, wenn man $A = 90°$ setzt, $\cos a = \cos b \cos c$, woraus man a findet. Nun ist $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ oder $\frac{1}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$, also $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$. Will man B und C ohne a finden, so setze man in die zweite Formel aus (52) für $\cos a$ den Werth $\cos b \cos c$, so wird $\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin a \sin c \cos B$, woher:

$\cos b \sin^2 c = \sin a \sin c \cos B$, und, da $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$ ist,

$\cos b \sin c = \frac{\sin b \cos B}{\sin B}$; daraus zieht man $\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin c}$ und ebenso findet man

$\text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\sin b}$.

55) a, b sind gegeben; das Uebrige zu finden.

Aus dem vorigen §. ist $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$ und $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$. Die Bestimmung des Winkels B durch seinen sinus kann zweideutig seyn; deswegen sucht man B besser, nachdem c bekannt ist, aus (54), oder auf folgende Art:

$\cos b \sin c = \sin a \cos B$ und $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ (54), also:

$\text{tang } c = \frac{\sin a \cos B}{\cos a}$ oder $\cos B = \frac{\text{tang } c}{\text{tang } a}$. Ebenso ist

$\cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$, woher man C findet.

56) a, C sind gegeben, das Uebrige zu finden.

Aus (55) ist $\cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$, also $\text{tang } b = \text{tang } a \cos C$; ferner $\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$, woraus $\sin c = \sin a \sin C$. Will man die Zweideutigkeit dieser Formel vermeiden, so berechne man c nach b aus der Formel $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$. B findet man so: $\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin c}$, $\text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\sin b}$; multiplicirt man diese Formeln miteinander, so ist:

$\text{tang } B \text{ tang } C = \frac{1}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos a}$, folglich $\text{tang } B = \frac{1}{\cos a \text{ tang } C}$.

Digitized by Google

57) b, B sind gegeben. Es ist: $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$ und $\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}$, also $\sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$; ferner ist $\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\operatorname{tang} b \sin B}{\operatorname{tang} B \sin b} = \frac{\cos B}{\cos b}$.

Alle gesuchte Seiten und Winkel sind hier nur durch sinus gegeben; daher bleibt die Auflösung der Aufgabe noch immer zweideutig; um sich vollkommen zu versichern, daß diese Zweideutigkeit wirklich Statt habe, und damit man nicht glauben könne, es ließen sich vielleicht Formeln finden, wo dieselbe gehoben wäre, sei Folgendes: (Siehe Fig. VIII.)

Wenn man das in Frage stehende Dreieck wirklich vermöge B und b construiren sollte, so würde man zuerst den Bogen CA = b machen, dann durch A einen größten Kreis ziehen, welcher auf CA senkrecht stünde; dieser sei ABNB'A; nun müßte man einen größten Kreis BCB' ziehen, welcher mit der Ebene ABB' einen Winkel gleich B machte; denn dann wäre CBA = B, und folglich CAB das verlangte Dreieck. Aber CB'A ist auch gleich B, und daher CAB' ein Dreieck, welches auch den gegebenen Bedingungen genug thut; mithin hat die Seite a zwei Werthe CB und CB', ebenso C die beiden Werthe BCA und ACB; c die Werthe BA und B'A. Bemerkt man nun, daß BB' nothwendig ein Durchmesser der beiden Kreise BCB' und BAB' ist, so erhellt, daß CB' = 180°—CB, BA = 180°—B'A, also sin CB' = sin CB sin BA = sin B'A sei; und da auch sin ACB = sin ACB' seyn muß, so ist die obige Zweideutigkeit nothwendig.

58) b, C sind gegeben.

Es ist $\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C$ und aus (55) $\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}$, so wie auch $\cos b \sin c = \sin a \cos B$ und $\cos c \sin b = \sin a \cos C$; dividirt man diese Gleichungen, so ist $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b} = \frac{\sin b \,.\, \operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} b} = \cos b \operatorname{tang} C$, mithin ist: $\cos B = \cos b \sin C$.

59) B, C sind gegeben.

Aus (56) ist $\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{1}{\cos a}$, folglich $\cos a = \frac{1}{\operatorname{tang} B \,.\, \operatorname{tang} C}$; aus (58) ist $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$ und folglich auch $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$.

Es kann sonderbar scheinen, daß hier ein sphärisches Dreieck durch lauter Winkel gegeben ist, indem wohl die Gestalt, aber nicht die Ausdehnung einer Figur durch Winkel

Digitized by Google

bestimmt werden kann; dieser Widerspruch verschwindet, wenn man bedenkt, daß bei sphärischen Dreiecken immer eine Linie, nämlich der Radius der Kugel, gegeben ist.

60) Die Auflösung der sphärischen schiefwinkeligen Dreiecke bietet folgende Fälle dar:

Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel sind gegeben, das Uebrige zu finden.

b, c, A sind gegeben.

Es ist $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Um diese Foemel zur Berechnung durch Logarithmen tauglich zu machen, suche man einen Winkel φ, und eine Zahl M so, daß

$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = M \cos (b - \varphi)$ oder

$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = M \cos b \cos \varphi + M \sin b \sin \varphi$ sei.

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man

$M \cos \varphi = \cos c$ und $M \sin \varphi = \sin c \cos A$ setzt, woraus

$\tang \varphi = \tang c \cos A$ und $M = \frac{\cos c}{\cos \varphi}$, daher

$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi)$ wird.

Man hat also, um a zu finden, erst φ aus $\tang \varphi = \tang c \cos A$, und sodann a aus $\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi)$ zu berechnen. Nun kann man die Winkel B und C durch die Formeln $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ und $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$ finden.

Folgendes soll zeigen, wie man diese Winkel, ohne a zu kennen, berechnet: es ist $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$; daraus $\cos B = 1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$,

$$\text{mithin } 2 \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{\sin a \sin c + \cos a \cos c - \cos b}{\sin a \cdot \sin c} = \frac{\cos (a - c) - \cos b}{\sin a \cdot \sin c}.$$

Aber $\cos (a - c) - \cos b = 2 \sin \left(\frac{b + c - a}{2}\right) \sin \left(\frac{b + a - c}{2}\right)$ nach (2); also

$\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{\sin \left(\frac{b + c - a}{2}\right) \sin \left(\frac{b + a - c}{2}\right)}{\sin a \sin c}$; setzt man nun $b + c + a = 2S$, so ist

$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (S - a) \sin (S - c)}{\sin a \sin c}}$, und ebenso $\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (S - a) \sin (S - b)}{\sin a \sin b}}$.

Digitized by Google

Wenn man, anſtatt oben $\cos B = 1 - 2\sin^2\frac{B}{2}$ zu ſetzen, $\cos B = 2\cos^2\frac{B}{2} - 1$ macht, ſo erhält man auf eine ähnliche Weiſe wie vorhin,

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cdot \sin(S-b)}{\sin a \sin c}} \text{ und folglich } \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \sin(S-c)}{\sin a \sin b}}.$$ Nun iſt:

$$\sin\left(\frac{B \pm C}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \pm \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\cos\left(\frac{B \pm C}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \mp \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

mithin $$\sin\left(\frac{B \pm C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin^2(S-c)\sin(S-a)\sin S}{\sin^2 a \sin b \sin c}} \pm \sqrt{\frac{\sin^2(S-b)\sin(S-a)\sin S}{\sin^2 a \sin b \sin c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(S-a)\sin S}{\sin b \sin c}} \times \left(\frac{\sin(S-c) \pm \sin(S-b)}{\sin a}\right) =$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}A \times \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\left(\frac{a}{2}\right) \times \begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\sin a}.$$ Ebenſo findet man

$$\cos\left(\frac{B \pm C}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{1}{2}A \times \begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\left(\frac{a}{2}\right) \times \begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\sin a}.$$

Daraus zieht man leicht:

$$\tan\frac{1}{2}(C+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)}\cot.\frac{1}{2}A$$

$$\tan\frac{1}{2}(C-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}\cot.\frac{1}{2}A.$$

Durch dieſe Formeln, welche unter dem Namen der Analogien von Neper bekannt ſind, kann man B und C ohne a finden.

Man kann die Winkel B und C auch folgendermaßen berechnen: $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$; in dieſe Gleichung ſetze man für $\cos a$ den Werth $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ und für $\sin a$ den $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$, ſo wird:

$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin b \sin c \cot B \sin A$, alſo

$\cos b \sin c = \sin b \cos c \cos A + \sin b \cot B \sin A$, daher

$$\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}, \text{ mithin auch } \cot C = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}.$$

Digitized by Google

Um diese Formeln zur Berechnung durch Logarithmen tauglich zu machen, setze man: $\cot b \sin c - \cos c \cos A = M \sin(c - \varphi) = M \sin c \cos\varphi - M \cos c \sin\varphi$; mithin $M\cos\varphi = \cot b$, $M\sin\varphi = \cos A$, $\tang\varphi = \frac{\cos A}{\cot b}$, also $\cot B = \frac{\cos A}{\sin\varphi}\sin(c-\varphi)$. —

61) Eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder a, B, C sind gegeben.

Wenn man das Dreieck ABC als Polardreieck eines andern A'B'C' ansieht, so ist: $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, $A' = 180° - a$, $B' = 180° - b$, $C' = 180° - c$.

Da nun $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$, so ist:

$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$ oder

$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C$ und ebenso

$\cos B = \sin A \sin C \cos b - \cos A \cos C$

$\cos C = \sin B \sin A \cos c - \cos A \cos B$.

Die erste dieser drei Formeln kann im gegenwärtigen Falle dienen um A zu finden; nur muß sie erst zur Berechnung durch Logarithmen eingerichtet werden.

Man setze: $\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = M\cos(B+\varphi) = M\cos B\cos\varphi - M\sin B\sin\varphi$; woher $M\cos\varphi = \cos C$, $M\sin\varphi = \sin C\cos a$ und hieraus

$\tang\varphi = \cos a \tang C$, $M = \frac{\cos C}{\cos\varphi}$ und $\cos A = -\frac{\cos C}{\cos\varphi}\cos(B+\varphi)$

Die Seiten b und c kann man durch die Proportion der Sinus finden, aber auch ohne A zu kennen, auf folgende Art: es ist, $\tang\frac{1}{2}(C'+B') = \frac{\cos\frac{1}{2}(c'-b')}{\cos\frac{1}{2}(c'+b')}\cot\frac{1}{2}A'$; also nach den obigen Beziehungen: $\tang\frac{1}{2}(360° - (b+c)) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}((360°-(B+C))}\cot\frac{1}{2}(180°-a)$

oder $\tang\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\cdot\tang\frac{1}{2}a$; und auf die nämliche Art:

$\tang\left(\frac{b-c}{2}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\cdot\tang\frac{1}{2}a$.

62) a, b, A, sind gegeben.

$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$, daher $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$. In diesem Falle bleibt B immer zweideutig.

Digitized by Google

Nun ist: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$; sieht man in diesen Gleichungen sin c und cos c als Unbekannte an, so findet man:

$\cos c = \frac{\cos a \sin a \cos B - \cos b \sin b \cos A}{\cos b \sin a \cos B - \cos a \sin b \cos A}$. Wenn man in diesem Werthe Zähler und Nenner durch cos a sin a cos B dividirt, so wird $\cos c = \frac{1 - \frac{\cos b \sin b \cos A}{\cos a \sin a \cos B}}{\frac{\cos b}{\cos a} - \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos B}}$.

Statt $\frac{\sin b}{\sin a}$ das Gleiche $\frac{\sin B}{\sin A}$ gesetzt, so ist

$\cos c = \frac{1 - \frac{\cos b}{\cos a} \cdot \frac{\tang B}{\tang A}}{\frac{\cos b}{\cos a} - \frac{\tang B}{\tang A}}$. Nun suche man φ und Θ so, daß

$\frac{\cos b}{\cos a} = \tang \varphi$ und $\frac{\tang B}{\tang A} = \tang \Theta$ ist; dann wird: $\cos c = \frac{1 - \tang \varphi \tang \Theta}{\tang \varphi - \tang \Theta} =$

$= \frac{\cos \varphi \cos \Theta - \sin \varphi \sin \Theta}{\sin \varphi \cos \Theta - \sin \Theta \cos \varphi} = \frac{\cos (\varphi + \Theta)}{\sin (\varphi - \Theta)}$.

Die Winkel C und B kann man entweder nach dem einen oder dem andern der beiden folgenden §§. berechnen.

63) a, B, A, sind gegeben.

Dieser Fall löst sich unmittelbar aus dem vorhergehenden mit Hülfe des Polardreieckes auf; denn es ist $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ und dann: $\frac{\cos b'}{\cos a'} = \tang \varphi$,

$\frac{\tang B'}{\tang A'} = \tang \Theta$ $\cos c' = \frac{\cos (\varphi + \Theta)}{\sin (\varphi - \Theta)}$, folglich: $\frac{\cos B}{\cos A} = \tang \varphi$, $\frac{\tang b}{\tang a} = \tang \Theta$

$\cos C = \frac{\cos (\varphi + \Theta)}{\sin (\Theta - \varphi)}$.

64) a, b, c sind gegeben, die Winkel zu finden.

Aus (60) hat man, wenn $S = \frac{a+b+c}{2}$, $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (S-b) \sin (S-c)}{\sin b \sin c}}$

oder $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin S \cdot \sin (S-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$ und ähnliche Formeln für B, C. (Anwendung in (72) und (213))

Digitized by Google

65) A, B, C, sind gegeben, die Seiten zu finden.

Im Polardreiecke ist $\sin\frac{1}{2}A' = \sqrt{\frac{\sin(S'-b')\sin(S'-c')}{\sin b' \sin c'}}$, wenn $S' = \frac{a'+b'+c'}{2}$; setzt man aber für a', b', c', A' ihre Werthe, so ist: $S' = 270° - \frac{A+B+C}{2} = 270° - S$, wo $S = \frac{A+B+C}{2}$; also $S'-b' = 270° - S - 180° + B = 90° - (S-B)$ und $S'-c' = 90° - (S-C)$, also $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}$ und so findet man analoge Formeln für b, c.

66) Den Inhalt eines sphärischen Dreieckes zu finden.

(Siehe Fig. VIII.) R heiße der Radius der Kugel; π das Verhältniß des Kreises zum Durchmesser; dann verhält sich das Stück der Kugelfläche, ACNBA, zur ganzen Kugelfläche, wie der Winkel A zu 360°, also: $ACNBA = \frac{A.4\pi R^2}{360°} = \frac{A.\pi.R^2}{90°}$.

Nun sei (Fig. IX.) ABC ein sphärisches Dreieck; IHFGED ein willkührlicher größter Kreis; dann sind die Linien PC, Bm, An, IF, GD, HE, Durchmesser, weil sie Durchschnitte größter Kreise sind.

Aber die Dreiecke HIP und CEF sind congruent; denn offenbar ist der Winkel HPI = ECF; ferner HP = CE, weil HP + HC und CE + HC beide gleich 180° sind. Ebenso ist CF = IP; mithin ist, rücksichtlich auf den Inhalt, ICH + CFE = ICH + IPH $= \frac{C}{90°}.\pi R^2$. Aus den nämlichen Ursachen ist $HBG + BDE = \frac{B}{90°}.\pi R^2$ und $AGF + IAD = \frac{A}{90°}\pi R^2$.

Die sechs Stücke, ICH, CEF, HBG, BDE, AGF, IAD machen zusammen die Halbkugel und noch 2ABC aus; also ist $\left(\frac{A+B+C}{90°}\right)\pi R^2 - 2.ABC = 2\pi R^2$; folglich $ABC = \frac{\pi R^2}{180°}(A+B+C-180°)$; oder, der Inhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem sphärischen Ueberschuß in Graden ausgedrückt, und mit $\frac{\pi R^2}{180°}$ multiplicirt.

Um den Inhalt eines sphärischen Dreieckes zu finden, muß man also die drei Winkel kennen, oder die Größe A + B + C − 180° aus dem Gegebenen berechnen.

Digitized by Google

Wenn man die drei Seiten des Dreieckes kennt, so hat man folgende sehr einfache Formel, welche wir hier ohne Beweis hinschreiben:

$$\sin\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{2}\right)=\frac{1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\times\sqrt{\sin S.\sin(S-a).\sin(S-b).\sin(S-c)}$$

67) Wir wollen nun die besonderen Fälle, welche bei der Auflösung der sphärischen Dreiecke Statt haben können, betrachten, und uns zuerst mit denjenigen Dreiecken beschäftigen, deren Seiten in Ansehung des Radius der Kugel sehr klein sind. Auflösung d. sphärischen Dreiecke in besondern Fällen.

Vor Allem ist es nöthig zu wissen, wie man in solchen Dreiecken den sphärischen Ueberschuß berechnet.

Der Radius der Kugel, worauf das Dreieck verzeichnet ist, sei R. Aus (66) folgt, daß der sphärische Ueberschuß $A+B+C-180^\circ=\frac{\text{Inhalt}.180}{\pi.R^2}$ ist, wenn man denselben in Graden ausdrücken will; soll er aber in Secunden gegeben seyn, so muß man beide Seiten der Gleichung mit 3600 multipliciren; daher Ueberschuß in Secunden

$$=\frac{\text{Inhalt}.180.3600}{\pi R^2}.\quad\text{Aber }\pi=\frac{\text{Halbkreis}}{\text{Rad.}}=\frac{\text{Secunden des Halbkreises}}{\text{Secunden des Radius}}=$$

$$=\frac{180.3600}{1}=180.3600\sin 1''\text{ und folglich Ueberschuß in Secunden}=\frac{\text{Inhalt}}{R^2\sin 1''}.$$

Wenn aber die Seiten des Dreieckes in Ansehung von R sehr klein sind, so wird es gewiß der Inhalt in Rücksicht auf R^2 seyn. Hieraus folgt, 1) daß der sphärische Ueberschuß in denen Dreiecken, wovon hier die Rede ist, sehr klein seyn müsse, welches man auch schon daher sehen konnte, weil diese Dreiecke von geradlinigen nur wenig verschieden seyn können; 2) daß man den Ueberschuß schon mit großer Genauigkeit berechnen kann, wenn man den Inhalt nur ohngefähr weiß, indem der Irrthum, den man im Inhalte haben könnte, noch durch R^2 dividirt wird, und also nur wenig Einfluß behält. Weil also das gegebene Dreieck von einem geradlinigen sehr wenig verschieden ist, so kann man in der gegenwärtigen Aufgabe seinen Inhalt wie den eines geradlinigen berechnen, und dabei die Formel $\text{Inhalt}=\frac{bc\sin A}{2}$ gebrauchen, wo b und c in Längenmaaß gegeben sind. Es wird also nach dem Obigen: $\text{Ueberschuß}=\frac{bc\sin A}{2R^2\sin 1''}$.

Digitized by Google

Sind die Seiten b und c in Theilen des Radius gegeben, so ist Ueberschuß $= \frac{b c \sin A}{2 \sin 1''}$; und wenn b und c in Secunden ausgedrückt sind, so ist: Ueberschuß $= \frac{b c \sin A \sin 1''}{2}$. (Anwendung (90) und numerisch (216))

In Fig. II. ist: Inhalt $= ABO + BOC = \frac{BO \times AO}{2} + \frac{BO \times OC}{2}$; nun ist $BO = c \sin A$ und $AO = c \cos A$, daher $ABO = \frac{c^2 \sin 2A}{4}$; ebenso $BOC = \frac{a^2 \sin 2C}{4}$. Man kann also auch den Ueberschuß durch die Formel: Ueberschuß $= \frac{c^2 \sin 2A}{4R^2 \sin 1''} + \frac{a^2 \sin 2C}{4R^2 \sin 1''}$ berechnen. Diese Formel kann in Tabellen mit doppeltem Eingange gebracht werden, wodurch man die Ueberschüsse schnell berechnet; man findet nämlich einerseits durch c und A das erste Glied, und dann durch a und C das zweite. (Anwendung (216.))

67) bis. Um einen viel genauern Werth des Ueberschusses zu finden, sei folgendes: Der sphärische Ueberschuß heiße E; dann ist:

$$\tan\frac{E}{2} = \tan\tfrac{1}{2}(A+B+C-180°) = -\cot\left(\frac{A+B+C}{2}\right) = \frac{\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) - 1}{\tan\frac{A}{2} + \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)};$$

multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\tan\frac{A}{2}$, so wird:

$$\tan\frac{E}{2} = \frac{\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) - 1\right)}{\tan^2\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\left(\frac{B+C}{2}\right)};$$ nun ist aber nach (60)

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)} \cdot \frac{1}{\tan\frac{1}{2}A}, \text{ wonach}$$

$$\tan\frac{E}{2} = \frac{\tan\frac{A}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)} - 1\right)}{\tan^2\frac{A}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)}} = \frac{\tan\frac{1}{2}A\left(\cos\frac{1}{2}(c-b) - \cos\frac{1}{2}(c+b)\right)}{\tan^2\frac{A}{2}\cos\frac{1}{2}(c+b) + \cos\frac{1}{2}(c-b)}$$

wird. Wendet man nun (2) an, und setzt $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$, $\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos^2\frac{A}{2}$,

Digitized by Google

so erhält man: $\tang\frac{E}{2}=\frac{\sin A\,.\,\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{1}{2}(c+b)+2\cos^2\frac{A}{2}\sin b\sin\frac{c}{2}}$. Wir wollen nun b, c, a klein genug annehmen, damit man in der Berechnung des Werthes von $\tang\frac{E}{2}$ alle Glieder weglassen könne, wo b sin 1″, c sin 1″, a sin 1″ mehr als viermal Factor sind, so wird:

$\tang\frac{E}{2}=\frac{\sin A\left(\frac{b}{2}-\frac{b^3}{2.5.8}\right)\left(\frac{c}{2}-\frac{c^3}{2.3.8}\right)}{1-\frac{1}{8}(c+b)^2+2\cos^2\frac{A}{2}\,.\,\frac{bc}{4}}$. Im Nenner vernachläßigten wir schon die Glieder 4ter Ordnung, weil sie, wie wir sogleich sehen werden, mit dem Zähler, worin keine niedrigere Glieder als von der zweiten Ordnung vorkommen, multiplicirt werden müssen, und also wenigstens Größen von der sechsten Ordnung hervorbringen.

Entwickelt man den Nenner auf die Potenz -1, so wird

$\tang\frac{E}{2}=\sin A\left(\frac{bc}{4}-\frac{bc^3}{4.3.8}-\frac{b^3c}{4.3.8}\right)\left(1+\frac{1}{8}(c+b)^2-2\cos^2\frac{A}{2}\,.\,\frac{bc}{4}\right)$. Wir können aber dem $2\cos^2\frac{A}{2}$ den Werth $\frac{c^2+b^2+2bc-a^2}{2bc}$ geben, welchen er haben würde, wenn das Dreieck, wovon die Rede ist, vollkommen geradlinig wäre; denn es ist leicht zu sehen, und wird aus dem folgenden §. erhellen, daß der wahre Werth von $2\cos^2\frac{A}{2}$ von dem eben angeführten nur durch Glieder 2ter Ordnung verschieden ist. Demnach wird aber:

$\tang\frac{E}{2}=\frac{\sin A\,.\,bc}{4}\left(1-\frac{c^2}{3.8}-\frac{b^2}{3.8}\right)\left(1+\frac{a^2}{8}\right)=\frac{bc\,.\,\sin A}{4}\left(1-\frac{c^2}{3.8}-\frac{b^2}{3.8}+\frac{a^2}{8}\right)=$

$=\frac{bc\sin A}{4}-\frac{bc\sin A}{3.4.8}(3a^2-b^2-c^2)$; da nun, wie man sieht, $\tang\frac{E}{2}$ von der zweiten Ordnung ist, so ist $\tang^3\frac{E}{2}$ von der sechsten, und man kann daher $\tang\frac{E}{2}=\frac{E}{2}$ setzen, da $\frac{E}{2}=\tang E-\frac{\tang^3\frac{E}{2}}{3}\ldots$. ist. Es wird also $E=\frac{bc\sin A}{2}-\frac{bc\sin A}{2.3.8}(3a^2-b^2-c^2)$.

In dieser Formel sind E, b, c, a, in Theilen des Radius gegeben; will man auch E in Secunden haben, und annehmen, daß b, c, a in Längenmaaß gegeben seien, so wird:

Digitized by Google

$E = \frac{b c \sin A}{2 . R^2 \sin 1''} - \frac{b c \sin A}{2 . 3 . 8 . R^2 \sin 1''} \frac{(3a^2 - b^2 - c^2)}{R^2}$. Man sieht also, daß man, wenn man $E = \frac{b c \sin A}{2 R^2 \sin 1''}$ setzt, Größen von der 4ten Ordnung vernachläßigt.

Anmerkung. Wenn man den Inhalt eines solchen sphärischen Dreieckes, wie wir hier betrachten, mit weit größerer Genauigkeit als in (67) finden wollte, so hätte man nach dem Vorhergehenden die Formel: Inhalt $= \frac{b c \sin A}{2} - \frac{b c \sin A}{2 . 3 . 8} \left(\frac{3a^2 - b^2 - c^2}{R^2}\right)$, wo b, c, a in Längenmaaß ausgedrückt sind. (Anwendung (221.))

68) Wenn a, b, c in Winkelmaaß ausgedrückt sind, so ist:

$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$; je nachdem nun a, b, c mehr oder weniger kleine Bogen sind, wird man in den Werthen von cos a, cos b, cos c, sin b, sin c, niedrigere oder höhere Potenzen von a sin 1″, b sin 1″, c sin 1″, vernachläßigen können. Wir wollen unterstellen, daß dieses mit allen, welche über die 4te sind, geschehen dürfe; so ist, wenn wir der Kürze wegen einsweilen für a sin 1″, b sin 1″, c sin 1″ blos a, b, c schreiben,

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2 . 3 . 4} - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{2 . 3 . 4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{2 . 3 . 4}\right)}{\left(b - \frac{b^3}{2 . 3}\right)\left(c - \frac{c^3}{2 . 3}\right)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2 . 3 . 4} - 1 + \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{2 . 3 . 4} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2 c^2}{4} - \frac{b^4}{2 . 3 . 4}}{b c \left(1 - \frac{c^2}{2 . 3} - \frac{b^2}{2 . 3}\right)}$$; dieses wird, wenn man im Nenner den Factor $1 - \frac{b^2}{2 . 3} - \frac{c^2}{2 . 3}$ auf die Potenz -1 erhebt, gleich

$$\frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^4 + c^4 + b^4}{2 . 3 . 4} - \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + b^2 a^2}{3 . 4}}{b c} =$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 . b c} + \frac{a^4 + c^4 + b^4 - 2 b^2 c^2 - 2 c^2 a^2 - 2 b^2 a^2}{2 . 3 . 4 . b c}$$

Wären b, c, a in Längenmaaß angegeben, so müßte man in der eben erhaltenen Gleichung, da in derselben b, c, a in Theilen des Radius ausgedrückt seyn sollen, für

Digitized by Google

b, c, a, die Werthe $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, $\frac{a}{R}$ setzen, und man erhielte:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2a^2c^2-2b^2a^2}{2.3.4.bc.R^2}.$$

Hätte man oben blos die zweiten Potenzen beibehalten, so wäre $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ gewesen, welches anzeigt, daß man in diesem Falle das Dreieck wie ein geradliniges aufgelößt hätte.

Es seien nun A', B', C' die Winkel eines geradlinigen Dreieckes, dessen Seiten gleich a, b, c wären; so würde $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.bc}$ seyn.

Nun ist $\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = \frac{-b^4-a^4-c^4+2b^2a^2+2b^2c^2+2a^2c^2}{4b^2c^2}$ und folglich nach obigem $\cos A = \cos A' - \frac{bc\sin^2 A'}{2.3.R^2}$ oder $\cos A = \cos A' - \sin A'.\frac{bc.\sin A'}{2.3.R^2}$.

Setzt man nun $\frac{bc\sin A'}{2.3.R^2} = E$, und bemerkt, daß im Werthe von cos A, keine Glieder von einer höhern als von der zweiten Ordnung vorkommen, so wird man einsehen, daß Glieder in E^2, E^3... fernerhin zu vernachläßigen sind. Man kann also E als $\sin\left(\frac{E}{\sin 1''}\right)$ und 1 als $\cos\left(\frac{E}{\sin 1''}\right)$ ansehen, und man erhält:

$\cos A = \cos A' \cos\left(\frac{E}{\sin 1''}\right) - \sin A' \sin\left(\frac{E}{\sin 1''}\right) = \cos\left(A' + \frac{E}{\sin 1''}\right)$; mithin

$A = A' + \frac{E}{\sin 1''} = A' + \frac{bc\sin A'}{2.3.R^2\sin 1''}$. Auch wird man hier für sin A', sin A setzen können und also $A = A' + \frac{bc\sin A}{2.3.R^2\sin 1''}$ oder $A' = A - \frac{bc\sin A}{2.3.R^2\sin 1''}$ erhalten; und da wir wissen (67) (bis), daß mit Weglassung der Größen 4ter Ordnung $\frac{bc\sin A}{2R^2\sin 1''}$ = dem Ueberschuß ist, so wird $A' = A - \frac{1}{3}$ Ueberschuß; ebenso fände man $B' = B - \frac{1}{3}$ Ueberschuß, $C' = C - \frac{1}{3}$ Ueberschuß, woraus folgender merkwürdige Satz fließt:

Wenn man ein sphärisches Dreieck hat, dessen Seiten sehr wenig krumm sind, so kann man es wie ein geradliniges nach folgender Regel auflösen: man berechne seinen sphärischen Ueberschuß; ziehe dann von jedem seiner

Digitized by Google

Winkel ein Drittheil des Ueberschusses ab, so werden die Reste, die Winkel eines geradlinigen Dreieckes seyn, dessen Seiten denen des sphärischen Dreieckes gleich sind *).

Die Auflösung des geradlinigen Dreieckes wird dann auch zugleich die des sphärischen enthalten.

69) Nun wollen wir versuchen anzugeben, bis wie weit es erlaubt sei, die vorige Regel anzuwenden.

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zuerst suchen, wieviel zum Werthe von A kommen kann, wenn wir in den Werthen von sin b, sin c, cos a, cos b, cos c, eine Potenz von $\frac{b}{R}, \frac{c}{R}, \frac{a}{R}$ mehr als vorhin beibehalten.

Man findet, daß, wenn man dieses thut, in den Werth von cos A noch folgende Größe hinzukömmt:

$$\frac{-a^6+3c^6-3b^2c^4-3b^4c^2+3b^6+5b^2a^4+5c^2a^4-7b^4a^2-7c^4a^2-10b^2c^2a^2}{2.3.4.5.6.bc}$$

wo wir a, b, c in Theilen des Radius angegeben unterstellen.

Diese Größe ist durch $4b^2c^2\sin^2A' = -b^4-a^4-c^4+2b^2a^2+2b^2c^2+2a^2c^2$ genau theilbar, und giebt zum Quotienten $\frac{a^2-3b^2-3c^2}{2.3.4.5.6.bc}$; sie ist also

$$= \frac{4bc\sin^2A'(a^2-3b^2-3c^2)}{2.3.4.5.6}, \text{ und folglich ist:}$$

$\cos A = \cos A' - \frac{bc\sin^2A'}{2.3} + \frac{4bc\sin^2A'(a^2-3b^2-3c^2)}{2.3.4.5.6}$. Man setze nun die Größe zweiter Ordnung $\frac{-bc\sin^2A'}{2.3} = F$, und die 4ter Ordnung

$\frac{4bc\sin^2A'(a^2-3b^2-3c^2)}{2.3.4.5.6} = G$, so ist $\cos A = \cos A' + F + G$. Nun sei $A = A' + H + I$, so daß H die Größe zweiter und I die 4ter Ordnung bedeutet, dann ist:

$$\cos A = \cos A' \cdot \cos(H+I) - \sin A' \sin(H+I); \text{ aber hier ist:}$$

$$\cos(H+I) = 1 - \frac{H^2}{2}, \quad \sin(H+I) = H+I, \text{ also:}$$

*) Diese Regel ist unter dem Namen der Regel von Legendre bekannt.

Digitized by Google

$\cos A = \cos A' - H \sin A' - \frac{H^2}{2} \cos A' - I \sin A'$. Vergleicht man dieſen Werth von $\cos A$ mit dem obigen, ſo müſſen die Größen von einerlei Ordnung einander gleich ſeyn, alſo:

$$-H \sin A' = -\frac{bc \sin^2 A'}{2.3}, \text{ woher } H = \frac{bc \sin A'}{2.3}, \text{ und}$$

$$-\frac{H^2 \cos A'}{2} - I \sin A' = G; \text{ da nun } \frac{H^2}{2} = \frac{b^2 c^2 \sin^2 A'}{2.2.2.3.3}, \text{ ſo iſt:}$$

$$I \sin A' = -\frac{b^2 c^2 \sin^2 A' \cos A'}{2.2.2.3.3} - \frac{4bc \sin^2 A' (a^2 - 3b^2 - 3c^2)}{2.3.4.5.6}, \text{ woher}$$

$$I = -\frac{bc \sin A'}{2.3.6} \left(\frac{bc \cos A'}{2} + \frac{a^2 - 3b^2 - 3c^2}{5}\right); \text{ und, da } bc \cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$\text{iſt endlich } I = \frac{bc \sin A'}{2.3.6} \left(\frac{7b^2 + 7c^2 + a^2}{4.5}\right), \text{ mithin}$$

$A = A' + \frac{bc \sin A'}{2.3} + \frac{bc \sin A'}{2.3.4.5.6} (7b^2 + 7c^2 + a^2)$, oder, wenn a, b, c, in Längenmaaß gegeben ſind, und die Winkel ſollen in Secunden ausgedrückt ſeyn,

$$A = A' + \frac{bc \sin A'}{2.3 R^2 \sin 1''} + \frac{bc \sin A' (7b^2 + 7c^2 + a^2)}{2.3.4.5.6 . R^4 \sin 1''}.$$

Wir haben nun bei Aufſtellung der Regel in (68) einen zweifachen Irrthum begangen.

1) Indem wir annahmen, daß $A = A' + \frac{bc \sin A'}{2.3 . R^2 \sin 1''}$ wäre, vernachläßigten wir die Größe 4ter Ordnung $\frac{bc \sin A' (7b^2 + 7c^2 + a^2)}{2.3.4.5.6 R^4 \sin 1''}$.

2) Wir unterſtellten, daß $\frac{bc \sin A'}{2.3 . R^2 \sin 1''}$ dem dritten Theile des wahren ſphäriſchen Ueberſchuſſes gleich ſei, wodurch wir wieder Größen vierter Ordnung wegließen.

Um dieſe beiden Irrthümer mit einem Male zu berechnen, verfahren wir wie folgt: der wahre Werth von A iſt, wie wir eben fanden, bis auf Größen ſechſter Ordnung $=$ $= A' + \frac{bc \sin A'}{2.3} + \frac{bc \sin A'}{2.3.4.5.6} (7b^2 + 7c^2 + a^2)$. Da nun nach (68) $A' = A - \frac{bc \sin A}{2.3} +$ Größen 4ter Ordnung iſt, ſo iſt auch: $\sin A' = \sin A - \frac{bc \sin A \cos A}{2.3} +$ Größen 4ter Ord., folglich hier $bc \sin A' = bc \sin A - \frac{b^2 c^2 \sin A \cos A}{2.3}$. Es iſt demnach:

Digitized by Google

$$A = A' + \frac{bc\sin A}{2.3} - \frac{b^2c^2\sin A\cos A}{2.3.6} + \frac{bc\sin A}{2.3.4.5.6}(7b^2+7c^2+a^2) =$$

$$= A' + \frac{bc\sin A}{2.3} + \frac{bc\sin A}{2.3.4.5.6}\{7b^2+7c^2+a^2-4.5.bc\cos A\}.$$

Setzt man nun, wie es offenbar erlaubt ist, im letzten Gliede für cos A den Werth $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, so ist: $4.5.bc\cos A = 10b^2+10c^2-10a^2$, und folglich:

$A = A' + \frac{bc\sin A}{2.3} + \frac{bc\sin A}{2.3.4.5.6}\{11a^2-3b^2-3c^2\}$. Wir haben aber bei Aufstellung unserer Regel, $A = A' + \frac{1}{3}$ Ueberschuß $= A' + \frac{bc\sin A}{2.3} - \frac{bc\sin A}{2.3.4.6}(3a^2-b^2-c^2)$ genommen. Der begangene Fehler beträgt also im Ganzen:

$$\frac{bc\sin A}{2.3.4.5.6}(11a^2-3b^2-3c^2+15a^2-5b^2-5c^2) = \frac{bc\sin A}{3.4.5.6}(13a^2-4b^2-4c^2).$$

Gesetzt nun, b sei die größte der drei Seiten a, b, c, so wird der berechnete Irrthum nie gleich $\frac{13b^4\sin A}{360}$, und mithin nie gleich $\frac{13b^4}{360}$ werden können. Hier ist der Irrthum, wie auch b in Theilen des Radius gegeben; der Irrthum in Secunden heiße I, und b in Secunden heiße β, so ist: $I = \frac{13\beta^4\sin^4 1''}{360.\sin 1''} = \frac{13\beta^4.\sin^3 1''}{360}$; soll also I auch nur 0″,05 betragen, so muß $\beta^4 = \frac{18}{13\sin^3 1''}$. Nun ist:

$\log 18 = 1{,}25527$
$-3\log\sin 1'' = 15{,}94329$
$-\log 13 = \bar{2}{,}88606$
$4\log\beta = 16{,}08462$

$\log\beta = 4{,}02115$

$\beta = 10500'' = 2°,55'$. Dieses ist der Werth, den die größte Seite des Dreieckes haben kann, ehe man bei Anwendung der Regel des vorigen §. im Winkel A einen Irrthum von 0″,05 zu befürchten hat. Sollte der Irrthum nur höchstens 0″,01 ausmachen, so dürfte die längste Seite nur 1°, 57′ betragen.

70) Welchen Irrthum begeht man, wenn man das sphärische Dreieck vollkommen wie ein geradliniges betrachtet?

Wenn man dieses thut, so vernachläßigt man nach dem vorigen §. $\frac{bc\sin A}{2.3.\sin 1''}$ im Werthe von A; dieser Ausdruck beträgt höchstens $\frac{b^2}{2.3.\sin 1''}$, wenn b noch immer die größte

Digitized by Google

Seite ist; soll dieses nur 0″,05 ausmachen, so muß $\beta^2 = \frac{0{,}3}{\sin 1''}$ seyn, woher $\beta = 249'' = 4',9''$. So viel dürfen also die Seiten eines Dreieckes höchstens betragen, wenn man es als vollkommen geradlinig betrachten will, und einen Irrthum von 0″,05 in den Winkeln nicht achtet.

71) In dem Dreiecke BAC Fig. X. ist jede der Seiten c und b sehr wenig von 90° verschieden; man soll den Winkel A durch b, c, a bestimmen. Wären $b = 90°$ und $c = 90°$, so wäre $A = a$; man setze daher $A = a + x$, so wird x ein sehr kleiner Bogen seyn. Wir setzen auch $b = 90° - \beta$, $c = 90° - \gamma$, und wollen x in Function von β und γ finden. Man hat:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma}.$$ Nun ist:

$\cos A = \cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x = \cos a - x \sin 1'' \sin a$, in der Unterstellung, daß man Alles, was über die erste Potenz von $x \sin 1''$ ist, vernachläßige, und daher $\cos x = 1$, $\sin x = x \sin 1''$ setze. Es ist also:

$$\cos a - x \sin 1'' \sin a = \frac{\cos a - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma}, \text{ oder}$$

$$-x \sin 1'' = \frac{\cos a (1 - \cos\beta \cos\gamma) - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma \sin a}.$$ Aus dieser Gleichung erhellt, daß $x \sin 1''$ von der zweiten Ordnung in Rücksicht auf $\beta \sin 1''$, $\gamma \sin 1''$ ist, und daß wir daher Alles, was über diese zweite Ordnung ist, aus der Ursache weglassen müssen, weil wir von $x \sin 1''$ nur die erste Potenz beibehalten; es ist also:

$$-x \sin 1'' = \frac{\cos a \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) \sin^2 1'' - \beta\gamma \sin^2 1''}{\sin a \left(1 - \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) \sin^2 1''\right)} =$$

$$= \frac{\left(\cos a \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) \sin^2 1'' - \beta\gamma \sin^2 1''\right)\left(1 + \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) \sin^2 1''\right)}{\sin a} =$$

$$= \frac{\cos a \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) \sin^2 1'' - \beta\gamma \sin^2 1''}{\sin a}.$$ Man pflegt diese Formel so einzukleiden, daß sie erstens durch Logarithmen leicht zu berechnen sei, und ferner erlaube Tafeln zu construiren,

Digitized by Google

wodurch man für gegebene β, γ, a, das x leicht findet. Dieses geschieht auf folgende Art: man setze $\cos a = \cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a$, und $\beta\gamma = \beta\gamma(\cos^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} a)$; so findet man

$$-x = \left\{ \frac{(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)\cos^2 \frac{1}{2} a - (\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)\sin^2 \frac{1}{2} a}{4 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} \right\} \sin 1'',$$ und folglich

$$x = \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 \tang \tfrac{1}{2} a \sin 1'' - \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} a \sin 1''.$$ In dieser Formel sind β und γ in Secunden ausgedrückt. Nun kann man Tafeln berechnen, wo man mit $(\beta+\gamma)$ und a das erste Glied, und mit $\beta-\gamma$ und a das zweite Glied findet.

Es kann der Fall seyn, daß eines von β, γ, oder beide negativ sind; dann darf man nur in der Formel die Zeichenveränderung anmerken.

72) Wir wollen nun den Irrthum berechnen, welcher in der vorhergehenden Formel dadurch Statt finden kann, daß man die Glieder 4ter Ordnung vernachläßigt. Behält man dieselben bei, so ist: $\cos(a+x) = \cos a - \frac{x^2 \cos a}{2} - x \sin a$, und, wenn man $\frac{\beta^2+\gamma^2}{2} = H$ setzt: $\sin\beta \sin\gamma = \beta\gamma\left(1 - \frac{H}{3}\right)$; $\cos\beta\cos\gamma = 1 - H + \frac{H^2}{2.3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{2.3}$ und folglich:

$$-x - \frac{x^2 \cot a}{2} = \frac{\cos a(1 - \cos\beta\cos\gamma) - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma\sin a} =$$

$$= \frac{\cos a\left(H - \frac{H^2}{2.3} - \frac{\beta^2\gamma^2}{2.3}\right) - \beta\gamma\left(1 - \frac{H}{3}\right)}{\left(1 - H + \frac{H^2}{2.3} + \frac{\beta^2\gamma^2}{2.3}\right)\sin a}.$$ Entwickelt man hier den Nenner auf die Potenz — 1 so weit es nöthig ist, so findet man:

$$x + \frac{x^2}{2}\cot a = \frac{\beta\gamma - H\cos a - \frac{5}{6}H^2\cos a + \frac{2}{3}H\beta\gamma + \frac{\beta^2\gamma^2\cos a}{2.3}}{\sin a}.$$ Da nun nur Glieder 4ter Ordnung beibehält, so kann man, um $\frac{x^2}{2}\cot a$ zu erhalten, $x = \frac{\beta\gamma - H\cos a}{\sin a}$ nehmen; dann wird $\frac{x^2\cot a}{2} = \frac{\beta^2\gamma^2\cos a - 2\beta\gamma H\cos^2 a + H^2\cos^3 a}{2\sin^3 a}$ seyn. Man findet nun leicht, daß sämmtliche Glieder 4ter Ordnung im Werthe von x:

$$\frac{2H\beta\gamma}{3}(2\sin^2 a + 3\cos^2 a) - \frac{H^2\cos a}{3}(5\sin^2 a + 3\cos^2 a) + \frac{\beta^2\gamma^2}{3}\cos a(\sin^2 a - 3)$$
$$2\sin^3 a$$

Digitized by Google

ausmachen. Dieſe Größe iſt der hier geſuchte Irrthum. Wir wollen ſie J nennen, und überall im Zähler $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ ſetzen, ſo wird:

$$J = \frac{\frac{2H\beta\gamma}{3}(2+\cos^2 a) - \frac{H^2\cos a}{3}(5-2\cos^2 a) - \frac{\beta^2\gamma^2}{3}\cos a(2+\cos^2 a)}{2\sin^3 a}.$$

Man ſieht hieraus, daß für einen ſehr kleinen, oder von 180° ſehr wenig verſchiedenen, Winkel a, die Formel aus (71) ganz unzuverläßig wird. Nehmen wir aber an, daß a nie kleiner als 30° noch größer als 120° werde, ſo iſt $\sin a > \frac{1}{2}$, und folglich

$$J < \frac{8H\beta\gamma(2+\cos^2 a) - 4H^2\cos a(5-2\cos^2 a) - 4\beta^2\gamma^2\cos a(2+\cos^2 a)}{3}.$$

Denkt man ſich nun auch den ſchlimmſten Fall, nämlich, wo alle Glieder des Zählers poſitiv werden, ſo iſt leicht zu ſehen, daß doch noch immer

$J < \frac{8H\beta\gamma(2+1)+4H^2(5)+4\beta^2\gamma^2(2+1)}{3}$ ſei. Iſt nun $\beta > \gamma$, ſo iſt $H < \beta^2$ und $\beta\gamma < \beta^2$, mithin $J < \frac{56.\beta^4}{3}$; oder, wenn β und J beide in Secunden ausgedrückt ſeyn ſollen: $J < \frac{56.\beta^4 \sin^3 1''}{3}$. Soll dieſe Größe nur 0″,05 betragen, ſo darf β^4 nur $\frac{3}{20.56.\sin^3 1''}$ ſeyn, woher man $\beta = 36',41''$ findet. Nähme man $a = 90°$ Grad an, welches eine ſehr vortheilhafte Unterſtellung wäre, um einen kleinen Irrthum zu erhalten, ſo fände man $\beta = 1°,24'$, damit $J < 0'',05$ bliebe. Wenn man nach dieſen Werthen Urſache zu haben glaubt, um die Formel aus (71) zu verwerfen, ſo muß man A nach (64) berechnen. (Anwendung hiervon in (89, b) und numeriſch in (213))

73) In dem Dreiecke CAB Fig. XI. ſind b, c, A gegeben, und es wird angenommen, daß c in Rückſicht des Radius der Kugel ſehr klein, a und b hingegen willkührlich ſeien; man ſoll a, B′ und C finden. Um dieſes zu thun, unterſtellen wir, daß c in Theilen des Radius ausgedrückt, und folglich eine kleine Zahl ſei; dann ſuchen wir a—b, B′—A, und C, welche alle klein ſind, nach den Potenzen von c zu entwickeln.

Es iſt $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Nun ſei $a = b + Pc + Qc^2 + Rc^3$, wo wir Alles, was über die dritte Potenz von c iſt, weglaſſen. Dann iſt:

$$\cos a = \cos b \cos(Pc + Qc^2 + Rc^3) - \sin b \sin(Pc + Qc^2 + Rc^3);$$

$$\cos(Pc + Qc^2 + Rc^3) = 1 - \frac{P^2c^2}{2} - \frac{2PQc^3}{2};$$

Digitized by Google

$\sin(Pc+Qc^2+Rc^3) = Pc+Qc^2+Rc^3-\frac{P^3c^3}{2.3}$, und folglich:

$\cos a = \cos b - cP\sin b - c^2\left(\frac{P^2\cos b}{2}+Q\sin b\right) - c^3\left(\frac{2PQ\cos b}{2}+R\sin b-\frac{P^3\sin b}{2.3}\right)$

Aber von oben ist: $\cos a = \cos b\left(1-\frac{c^2}{2}\right)+\sin b\left(c-\frac{c^3}{2.3}\right)\cos A$, oder

$\cos a = \cos b - \frac{c^2\cos b}{2} + c\sin b\cos A - \left(\frac{c^3}{2.3}\right)\sin b\cos A$. Da nun die beiden Werthe von cos a identisch sind, so erhält man: $-P\sin b = \sin b\cos A$, woher $P = -\cos A$.

$\frac{\cos b}{2} = \frac{P^2\cos b}{2} + Q\sin b$, woher $Q = \frac{\sin^2 A\cot b}{2}$, und

$\frac{\sin b\cos A}{2.3} = PQ\cos b + R\sin b - \frac{P^3\sin b}{2.3}$, oder, wenn man für P und Q ihre Gleichen setzt: $\frac{\sin b\cos A}{2.3} = -\frac{\sin^2 A\cot b\cos A\cos b}{2} + R\sin b + \frac{\cos^3 A\sin b}{2.3}$ oder

$\frac{\sin b\cos A\sin^2 A}{2.3} = -\frac{\sin^2 A\cos^2 b\cos A}{2\sin b} + R\sin b$, woraus

$R = \frac{\sin^2 A\cos A}{2\sin^2 b}\left(\frac{\sin^2 b}{3}+\cos^2 b\right) = \frac{1}{4}\sin 2A\sin A\left\{\frac{1}{3}+\cot^2 b\right\}$ folglich

$$a-b = -c\cos A + \frac{c^2\sin^2 A\cot b}{2} + \frac{c^3}{4}\sin 2A\sin A\left\{\frac{1}{3}+\cot^2 b\right\},$$

dieses ist a—b in Theilen des Radius; um es in Secunden zu finden, muß man seinen Werth durch sin 1″ dividiren. C findet man folgendermaaßen: man hat

$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$, und es sei $\sin a = \sin b + pc + qc^2 + \ldots$; so ist

$$\sin C = \frac{\sin c\sin A}{\sin a} = \frac{\sin A\left(c-\frac{c^3}{2.3}\right)}{\sin b+pc+qc^2+\ldots} = \frac{\sin A\left(c-\frac{c^3}{2.3}\right)}{\sin b\left(1+\frac{p}{\sin b}.c+\frac{q}{\sin b}c^2+\ldots\right)} =$$

$$= \frac{\sin A}{\sin b}\left(c-\frac{c^3}{2.3}\right)\left\{1-\frac{p}{\sin b}c-\frac{q}{\sin b}c^2+\frac{p^2c^2}{\sin^2 b}\right\} =$$

$$= \frac{\sin A}{\sin b}c - \frac{p\sin A}{\sin^2 b}c^2 - \frac{q\sin A}{\sin^2 b}c^3 + \frac{p^2\sin A}{\sin^3 b}c^3 - \frac{\sin A}{2.3.\sin b}c^3 \ldots;$$

nun ist aber $a = b+Pc+Qc^2+\ldots\ldots$, mithin

$\sin a = \sin b\left(1-\frac{P^2c^2}{2}+\ldots.\right)+\cos b\left(Pc+Qc^2+\ldots\ldots\right)$, daher

Digitized by Google

$p = P\cos b$, $q = Q\cos b - \frac{P^2 \sin b}{2}$, oder $p = -\cos b \cos A$

$q = \frac{\sin^2 A \cos^2 b}{2 \sin b} - \frac{\cos^2 A \sin^2 b}{2 \sin b}$; ferner ist $\sin C = C \sin 1'' - \frac{C^3 \sin^3 1''}{2.3}$; und man kann hier, da $\sin C$ von der nämlichen Ordnung wie c ist, $\sin C = C \sin 1'' - \frac{\sin^3 C}{2.3}$ setzen; es ist also: $C \sin 1'' = \sin C + \frac{\sin^3 C}{2.3} = \sin C + \frac{\sin^3 A}{2.3.\sin^3 b} c^3$; mithin

$C \sin 1'' = \frac{\sin A}{\sin b}\left\{c - \frac{p c^2}{\sin b} - \frac{q c^3}{\sin b} + \frac{p^2 c^3}{\sin^2 b} - \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^3 \sin^2 A}{2.3 \sin^2 b}\right\}$; setzt man für p, q die obigen Werthe, so ist:

$$C = \frac{\sin A}{\sin b \sin 1''}\left\{c + \frac{\cos b \cos A}{\sin b} c^2 - \frac{\sin^2 A \cos^2 b}{2 \sin^2 b} c^3 + \frac{\cos^2 A}{2} c^3 + \frac{\cos^2 A \cos^2 b}{\sin^2 b} c^3 + \left(\frac{\sin^2 A - \sin^2 b}{2.3.\sin^2 b}\right) c^3\right\}.$$

Wir wollen nun suchen die Glieder in c^3 möglichst zu reduziren; hierzu schreiben wir in denselben überall für $\cos^2 A$, $1 - \sin^2 A$, und erhalten folgenden Coefficienten von c^3:

$$\frac{\sin A}{\sin b \sin 1''}\left\{-\frac{\sin^2 A \cos^2 b}{2 \sin^2 b} + \tfrac{1}{2} - \frac{\sin^2 A}{2} + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b} - \frac{\sin^2 A \cos^2 b}{\sin^2 b} + \frac{\sin^2 A}{2.3.\sin^2 b} - \frac{1}{2.3}\right\}.$$

Wenn wir nun einstweilen den gemeinschaftlichen Factor $\frac{\sin A}{\sin b \sin 1''}$ zurückhalten, so ist dieser Coefficient gleich:

$$\sin^2 A\left\{-\frac{\cos^2 b}{2 \sin^2 b} - \tfrac{1}{2} - \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b} + \frac{1}{2.3 \sin^2 b}\right\} + \tfrac{1}{2} + \cot^2 b - \frac{1}{2.3} =$$

$$= \sin^2 A\left\{\frac{-2 - 6\cos^2 b}{6 \sin^2 b}\right\} + \tfrac{1}{3} + \cot^2 b = -\sin^2 A\left\{\frac{1 + 3\cos^2 b}{3 \sin^2 b}\right\} + \tfrac{1}{3} + \cot^2 b =$$

$$= -\sin^2 A\left\{\frac{\sin^2 b + 4\cos^2 b}{3 \sin^2 b}\right\} + \tfrac{1}{3} + \cot^2 b = -\sin^2 A\left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3}\cot^2 b\right\} + \tfrac{1}{3} + \cot^2 b =$$

$$= \tfrac{1}{3}\cos^2 A + \cot^2 b\left\{1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 A\right\}.$$ Also endlich:

$$C = \frac{\sin A}{\sin b \sin 1''}\left\{c + \cot b . \cos A . c^2 + c^3\left(\tfrac{1}{3}\cos^2 A + \cot^2 b\left(1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 A\right)\right)\right\}.$$

Es bleibt nun noch übrig $A - B'$ zu bestimmen.

Man hat $\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A}$ nach (60). Nun ist $\cot B = \frac{1}{\tan g B} = -\frac{1}{\tan g B'}$,

Digitized by Google

daher $\text{tang}\,B' = \frac{-\sin A}{\cot b \sin c - \cos c \cos A} = \frac{-\sin A}{\cot b\left(c - \frac{c^3}{2.3}\right) - \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)\cos A} =$

$= \frac{-\sin A}{-\cos A + \cot b . c + \frac{c^2}{2}\cos A - \frac{\cot b . c^3}{2.3}} = \frac{\text{tang}\,A}{1 - \left(c . \frac{\cot b}{\cos A} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{2.3} \cdot \frac{\cot b}{\cos A}\right)} =$

$= \text{tang}\,A \left\{1 + c\frac{\cot b}{\cos A} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{2.3}\frac{\cot b}{\cos A} + c^2\frac{\cot^2 b}{\cos^2 A} + c^3\frac{\cot b}{\cos A} + \frac{\cot^3 b}{\cos^3 A} . c^3\right\} =$

$= \text{tang}\,A \left\{1 + mc + nc^2 + lc^3\right\}$, wenn $m = \frac{\cot b}{\cos A}$, $n = \frac{\cot^2 b}{\cos^2 A} + \frac{1}{2}$

$l = \frac{\cot^3 b}{\cos^3 A} + \frac{\cot b}{\cos A} - \frac{\cot b}{2.3.\cos A}$. Es ist aber:

$\text{tang}\,(B' - A) = \frac{\text{tang}\,B' - \text{tang}\,A}{1 + \text{tang}\,B' . \text{tang}\,A} = \frac{\text{tang}\,A\,(mc + nc^2 + lc^3)}{1 + \text{tang}^2 A\,(1 + mc + nc^2 + lc^3)} =$

$= \frac{\text{tang}\,A\,(mc + nc^2 + lc^3)}{\frac{1}{\cos^2 A} + \text{tang}^2 A\,(mc + nc^2 + lc^3)} = \frac{\sin A \cos A\,(mc + nc^2 + lc^3)}{1 + \sin^2 A\,(mc + nc^2 + lc^3)} =$

$= \sin A \cos A\,(mc + nc^2 + lc^3)\,(1 - \sin^2 A\,(mc + nc^2) + \sin^4 A\, m^2 c^2) =$

$= \sin A \cos A \left\{ \begin{array}{l|l|l} mc + & n & c^2 + \quad l \\ & -m^2 \sin^2 A & -mn \sin^2 A \\ & & -mn \sin^2 A \\ & & +m^3 \sin^4 A \end{array} \right| c^3 \Bigg\}$; da nun

$\text{tang}\,(B' - A) = (B' - A) \sin 1'' + \frac{(B' - A)^3 \sin^3 1''}{3}$, und folglich hier

$(B' - A) \sin 1'' = \text{tang}\,(B' - A) - \frac{\text{tang}^3 (B' - A)}{3}$ ist; ferner

$\text{tang}^3 (B' - A) = \sin^3 A \cos^3 A\, m^3 c^3$ gesetzt werden muß, so ist:

$(B' - A) \sin 1'' = \sin A \cos A \left\{ \begin{array}{l|l|l} mc + & n & c^2 + \quad l \\ & -m^2 \sin^2 A & -2mn \sin^2 A \\ & & +m^3 \sin^4 A \\ & & -\frac{m^3}{3} \sin^2 A \cos^2 A \end{array} \right| c^3 \Bigg\}$.

Nun ist $n - m^2 \sin^2 A = \frac{\cot^2 b}{\cos^2 A} + \frac{1}{2} - \frac{\cot^2 b}{\cos^2 A} \sin^2 A = \cot^2 b + \frac{1}{2}$, und der Coefficient von c^3 innerhalb der Klammer ist:

Digitized by Google

$$\frac{\cot^3 b}{\cos^3 A} + \tfrac{5}{6}\frac{\cot b}{\cos A} - \frac{2\cot^3 b}{\cos^3 A}\sin^2 A - \frac{\cot b}{\cos A}\sin^2 A + \frac{\cot^3 b}{\cos^3 A}\sin^4 A - \frac{\cot^3 b}{3\cos^3 A}\sin^2 A\cos^2 A;$$

dieser ist gleich: $\frac{\cot^3 b}{\cos^3 A}\{1 - \sin^2 A + \frac{4}{3}\cos^2 A \sin^2 A\} + \frac{\cot b}{\cos A}\{\frac{5}{6} - \sin^2 A\} =$

$$= \frac{\cot^3 b}{\cos A}\{1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 A\} + \frac{\cot b}{\cos A}\{\tfrac{5}{6} - \sin^2 A\};$$ also endlich:

$$B' - A = \frac{c \cdot \sin A \cot b}{\sin 1''} + \frac{c^2 \sin A \cos A}{\sin 1''}(\tfrac{1}{2} + \cot^2 b) +$$

$$+ \frac{c^3 \cot b \sin A}{\sin 1''}\{\tfrac{5}{6} - \sin^2 A + \cot^2 b(1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 A)\}.$$

74) Wir wollen jetzt suchen, c und A zu berechnen, wenn b, a, C gegeben sind, indem wir bemerken, daß C und b — a kleine Dinge sind, wovon wir im vorliegenden Falle nur die niedrigsten Potenzen beibehalten werden.

Es ist: $\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C$ und $\cos C = 1 - \frac{C^2 \sin^2 1''}{2}$, mithin

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a - \frac{C^2 \sin b \sin a \sin^2 1''}{2} = \cos(b - a) - \frac{C^2 \sin b \sin a \sin^2 1''}{2};$$

daher $1 - \frac{c^2}{2} = 1 - \frac{(b-a)^2 \sin^2 1''}{2} - \frac{C^2 \sin b \sin a \sin^2 1''}{2}$, woher:

$$c^2 = (b-a)^2 \sin^2 1''\left\{1 + \frac{\sin b \sin a \cdot C^2}{(b-a)^2}\right\}, \text{ also: } c = (b-a)\sin 1''\sqrt{1 + \frac{\sin b \sin a \cdot C^2}{(b-a)^2}};$$

dieses ist c in Theilen des Radius; in Secunden ist $c = (b-a)\sqrt{1 + \frac{\sin b \sin a \cdot C^2}{(b-a)^2}}$.

Diesen Werth berechnet man sehr leicht, indem man $\tan g^2 \Theta = \frac{\sin b \sin a \cdot C^2}{(b-a)^2}$ setzt, woher $c = \frac{b-a}{\cos \Theta}$ wird *).

75) Es ist, besonders für die Folge, interessant zu sehen, wie man alle Formeln in (73) nach (6) durch Differentialrechnung findet.

---

*) Die √ im Werthe von c läßt sich hier nicht in eine convergente Reihe entwickeln, weil es keineswegs bedungen ist, daß $\frac{C}{b-a}$ eine kleine Größe seyn soll.

Digitized by Google

Man setze $a = f(c)$, das heißt, a gleich einer Function von c, so ist $a = f(o) + f'(o)\,c + f''(o)\cdot\frac{c^2}{2} + f'''(o)\cdot\frac{c^3}{2\cdot 3}$, und es ist: $f(o) = b$; denn wenn $c = o$ ist, wird $a = b$; ferner ist $f'(o) = \frac{da}{dc}$, worin man $c = o$ macht, und ebenso $f''(o) = \frac{d^2a}{dc^2}$, $f'''(o) = \frac{d^3a}{dc^3}$.

Nun hat man: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, und da b und A hier constante Größen sind, so giebt die Differentiirung: $-da \sin a = -dc \cos b \sin c + dc \cdot \sin b \cos c \cos A$.

Macht man $c = o$, so ist $\sin a = \sin b$, mithin: $-da \sin b = dc \cdot \sin b \cos a$, also $f'(o) = -\cos A$. Ferner wird durch eine zweite Differentiirung:

$-d^2a \sin a - (da)^2 \cos a = -(dc)^2 \cos b \cos c - \sin b \cos A \sin c\,(dc)^2$, und für $c = o$, $-d^2a \cdot \sin b - (da)^2 \cos b = -(dc)^2 \cos b$; daher

$-f'(o) \sin b - (f'(o))^2 \cos b = -\cos b$; setzt man für $f'(o)$ seinen Werth, so ist:

$-f'(o) \sin b - \cos A^2 \cos b = -\cos b$, also $f''(o) = \frac{\sin^2 A \cos b}{\sin b} = \sin^2 A \cot b$.

Ferner findet man:

$-d^3a \cdot \sin a - 3d^2a\,da \cdot \cos a + (da)^3 \sin a = (dc)^3 \cos b \sin c - \sin b \cos A \cos c \cdot (dc)^3$

und daher: $-f'''(o) \cdot \sin b - 3f''(o) \cdot f'(o) \cos b + (f'(o))^3 \cdot \sin b = -\sin b \cos A$,

oder $f'''(o) \sin b - \frac{3 \sin^2 A \cos A \cos^2 b}{\sin b} + \cos^3 A \sin b = \sin b \cos A$, also

$f'''(o) \cdot \sin b = \frac{3 \sin^2 A \cos A \cos^2 b}{\sin b} + \sin b \cos A \sin^2 A$; woher

$f'''(o) = \sin^2 A \cos A\,(1 + 5\cot^2 b)$. Setzt man die Werthe von $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$, $f'''(o)$ in die Reihe $a = f(o) + f'(o) \cdot c + f''(o) \cdot \frac{c^2}{2} + \ldots$, so erhält man die nämliche Formel wie in (73).

Für C ist $\cot C = \frac{\cos c \sin b - \cos b \sin c \cos A}{\sin c \sin A}$ und $f(o) = o$; aus dem Werthe von cot C erhält man nach geschehener Reduction, und weil $d \cot C = \frac{dC}{\sin^2 C}$ ist,

$\frac{dC}{\sin^2 C} = \frac{\sin b}{\sin^2 c \sin A} \cdot dc$, also $\frac{dC}{dc} = \frac{\sin b \sin^2 C}{\sin A \sin^2 c}$, und weil $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$, so ist:

$\frac{dC}{dc} = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin^2 a}$; macht man $c = o$, so wird $f'(o) = \frac{\sin A}{\sin b}$.

Da nun $dC = \frac{\sin b \sin A}{\sin^2 a} dc$ ist, so findet man $\frac{d^2C}{dc^2} = \frac{-2 \sin b \cdot \sin A \cdot \cos a}{\sin^3 a} \cdot \frac{da}{dc}$,

Digitized by Google

und weil für $c=o$, $\frac{da}{dc}=-\cos A$ ist, so wird $f''(o)=\frac{2\,.\,\sin b\,\sin A\cos b\cos A}{\sin^3 b}=$

$=\frac{2\sin A\cot b\,.\cos A}{\sin b}$. Differentiirt man die Gleichung $d^2C=-\frac{2\sin b\sin A\cos a}{\sin^3 a}.da.dc$,

und beobachtet, daß für $c=o$, $\frac{d^2a}{dc^2}=\sin^2 A\cot b$ ist, so findet man leicht den Werth von $f'''(o)$.

Für B′ endlich hat man zuerst $f(o)=A$, dann

$\cot B=-\cot B'=\frac{\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A}{\sin b\,\sin A}$; diese Gleichung muß man wiederholt differentiiren, dabei bemerken, daß für $c=o$, $B'=A$ wird, so findet man leicht die nothwendigen Differentialcoefficienten.

75) (bis). Wir wollen nun suchen, wie groß c seyn darf, damit man die Glieder 3ter Ordnung in den Formeln aus (73) weglassen könne, ohne daß man dadurch einen Irrthum von 0″,05 in den gesuchten Winkeln oder Seiten zu befürchten habe.

Die Glieder 3ter Ordnung betragen für $a-b$, ... $\frac{c^3}{4}\sin 2A\,\sin A\,(\frac{1}{3}+\cot^2 b)$,

für C ..... $\frac{c^3\sin A}{\sin b}\,(\frac{1}{3}\cos^2 A+\cot^2 b\,(1-\frac{4}{3}\sin^2 A))$ und für

$B'-A$, ... $c^3\,.\cot b\sin A\,(\frac{5}{6}-\sin^2 A+\cot^2 b\,(1-\frac{4}{3}\sin^2 A))$

Man würde keine Grenzen für diese Größen finden können, wenn der Werth von b ganz unbestimmt bleiben müßte. Wir werden aber später sehen, daß in den Anwendungen, welche von den Formeln (73) in unsern Gegenden gemacht werden, b nie weit von 45° abweicht, so daß wir zu unserm gegenwärtigen Zwecke ohne allen Anstand $b=45°$ und folglich $\cot b=1$ setzen dürfen. Diese Unterstellung reduzirt die obigen Größen auf:

$\frac{c^3\,.\sin 2A\sin A}{3}$, $\frac{c^3\sin A\,.\sqrt{2}}{3}(5\cos^2 A-1)$ und $\frac{c^3\sin A}{6}(14\cos^2 A-3)$.

Man wird sich nun leicht durch die gewöhnliche Methode versichern, daß der größte Werth von $\sin 2A\sin A$ gleich $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, der von $\sin A(5\cos^2 A-1)$ gleich $\frac{16}{3\sqrt{15}}$ und der von $\sin A(14\cos^2 A-3)$ gleich $\frac{\sqrt{11}\times 22}{\sqrt{42}\times 3}$ sei. Da die größten negativen Werthe von $\sin A(5\cos^2 A-1)$ und $\sin A(14\cos^2 A-3)$ offenbar -1 und -3 sind, welche, auch vom Zeichen abgesehen, nicht soviel als die größten positiven betragen, so weiß man,

Digitized by Google

daß dieſe letztern auch zugleich die größten abſoluten Werthe ſind. Man iſt alſo demnach gewiß, daß immer $\frac{c^3 \sin 2A \sin A}{3} < \frac{4c^3}{9\sqrt{3}}$; $\frac{c^3 \sin A \cdot \sqrt{2}}{3}(5\cos^2 A - 1) < \frac{16\sqrt{2}}{9\sqrt{15}} \cdot c^3$ und $\frac{c^3 \sin A}{6}(14\cos^2 A - 3) < \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{42}} \cdot \frac{11}{9} c^3$ iſt. Schafft man die Wurzelgrößen aus den Nennern weg, und nennt die zu ſchätzenden Größen, m, n, p, ſo iſt alſo:

$$m < \frac{4\sqrt{3}}{27} \cdot c^3; \quad n < \frac{16\sqrt{30}}{135} \cdot c^3; \quad p < \frac{11 \cdot \sqrt{462}}{378} \cdot c^3.$$

Sollen nun m, n, p, jede weniger als 0″,05 ausmachen, ſo darf, wenn c in Secunden ausgedrückt iſt, c^3 höchſtens die drei Werthe:

$\frac{27}{80\sqrt{3} \cdot \sin^2 1''}$, $\frac{27}{64\sqrt{30} \sin^2 1''}$, $\frac{189}{110\sqrt{462} \sin^2 1''}$ haben. Durch die Berechnung dieſer Größen wird man finden, daß durch die Weglaſſung der Glieder in c^3, bei $b = 45°$, auf $a - b$ kein Irrthum von 0″,05 zu befürchten ſei, wenn $c < 29'$ iſt, und daß die analogen Grenzen von c für die Formeln, welche C und $B' - A$ geben, 22′ und 25′ ſind.

Eine ganz ähnliche, aber weit leichtere Rechnung, wie die eben angeführte, wird zeigen, daß man unter denſelben Bedingungen, wie vorhin, die Glieder zweiter Ordnung weglaſſen darf, wenn c weniger als 2′,23″ in der erſten Formel, und weniger als 2′ in den beiden andern beträgt.

Viertes Kapitel.

Einige Lehrſätze aus der Aſtronomie und der Geographie.

76) Die Erde iſt rund, und die Geſtalt derſelben iſt von der einer Kugel nur ſehr wenig verſchieden; ihr Radius beträgt ohngefähr 6366198 Metres. Wie man zu der Kenntniß dieſes Werthes gelangt ſei, wird im zweiten Theile ausführlich gezeigt werden.

In Allem, was nun folgt, abſtrahiren wir gänzlich von den Erhöhungen und Vertiefungen, welche ſich auf der Erde befinden, und werden unter dem Namen Erdfläche, diejenige verſtehen, welche man erhielte, wenn man die Meeresfläche um den ganzen Erdball ausgebreitet dächte.

Digitized by Google

Wir sehen auf diese Art die Erde als einen glatten Körper an, und auch nur so kann er eine regelmäßige Figur haben, welche mathematisch behandelt zu werden fähig ist.

Mit Hülfe dieser Erinnerung wird man folgende Erklärungen leicht verstehen.

77) Die Linie, um welche die Erde sich täglich dreht, heißt die Erdachse. Die Puncte, wo diese Linie der Erd-Oberfläche begegnet, heißen die Erdpole, und werden durch die Namen Nord- und Süd-Pol, welche sie von den Himmelsgegenden, gegen welche sie hinliegen, erhalten, unterschieden.

78) Der scheinbare Horizont eines Punctes auf der Erde ist eine in diesem Puncte an die Erdfläche tangente Ebene. Der eingebildete Horizont ist eine Ebene, welche durch die Mitte der Erdachse geht, und mit dem scheinbaren Horizonte parallel läuft.

Der wahre Horizont ist die Erdfläche selbst.

Die Verticale eines Punctes ist eine in diesem Puncte auf dem Horizont senkrecht stehende gerade Linie, mithin eine Normale auf die Erdoberfläche.

79) Die Himmelskugel ist eine Kugelfläche, welche man sich aus der Mitte der Erdachse als Centrum mit einem sehr großen Radius beschrieben denkt; diesen Radius nimmt man, in Vergleich mit den Dimensionen der Erde, so groß an, daß man zwei Linien, welche von verschiedenen Puncten der Erde nach dem nämlichen Puncte der Himmelskugel gehen, als parallel ansehen darf.

Eine Ebene, welche auf der Erdachse, und in der Mitte derselben, senkrecht steht, schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise, welchen man den Himmels-Equator nennt.

Ein Himmels-Meridian ist die Durchschnittslinie der Himmelskugel mit irgend einer Ebene, welche durch die Erdachse geht.

Ein Himmels-Parallelkreis ist ein kleiner Kreis auf der Himmelskugel, dessen Ebene mit der Ebene des Equators parallel läuft.

Die Himmels-Pole sind die Puncte, wo die Erdachse der Himmelskugel begegnet.

80) Der Zenith eines Punctes der Erde ist da, wo seine Verticale der Himmelskugel begegnet.

Wenn man von allen Puncten des Himmels-Equators auf die Fläche der Erde Normalen zieht, so heißt die krumme Linie, welche man so auf der Erdfläche bezeichnet, der Erde-Equator. Ebenso erhält man einen Erde-Meridian, wenn man von allen

Digitized by Google

Puncten eines Himmels-Meridians auf die Erdfläche Normalen zieht. Auf die nämliche Art wird auch durch den Himmels-Parallelkreis der Erde-Parallelkreis erzeugt.

Jeder Punct auf der Erde hat also einen bestimmten Erde-Meridian, welcher einem bestimmten Himmels-Meridiane entspricht; die Verticale des Punctes wird durch seinen Himmels-Meridian gehen, oder der Himmels-Meridian geht durch den Zenith des Punctes. Ebenso hat jeder Punct auf der Erde, seinen Erde- und Himmels-Parallelkreis, welcher letztere auch durch seinen Zenith gehen muß.

81) Die geographische Breite eines Punctes auf der Erde, ist der Winkel, den seine Verticale mit der Ebene des Himmels-Equators macht; sie ist nördlich oder südlich, je nachdem der Punct zwischen dem Equator und dem Nordpole, oder zwischen dem Equator und dem Südpole liegt. (Siehe Fig. XII.)

Da die Erdachse auf der Ebene des Equators, und der Horizont auf der Verticale senkrecht steht, so ist die Breite eines Punctes gleich dem Winkel, den sein Horizont mit der Erdachse macht. Da nun, nach (79), eine Linie, welche man aus einem Puncte der Erde nach dem Himmelspole zieht, mit der Erdachse parallel ist, so wird der Winkel, den diese Linie mit dem Horizonte macht, der Breite des Punctes gleich seyn. Diesen Winkel nennt man auch die Höhe des Poles über dem Horizonte, weshalb die Breite eines Punctes auch seine Polhöhe heißt.

Die Breite eines Punctes läßt sich durch astronomische Beobachtungen, ohne genaue Kenntniß von der Gestalt der Erde, bestimmen.

82) Alle Orte, welche auf dem nämlichen Erdparallelkreise liegen, haben einerlei Breite.

Denn nach (79) und (80) sind alle Verticalen dieser Orte mit Linien parallel, welche aus der Mitte der Erdachse nach dem nämlichen Himmels-Parallelkreise gehen; diese Linien machen aber nothwendig mit der Erdachse lauter gleiche Winkel; mithin machen auch die Verticalen der benannten Orte mit der Erdachse gleiche Winkel; dasselbe müssen also auch ihre Horizonte thun; folglich haben diese Orte einerlei Polhöhe oder Breite.

83) Der Winkel, den der Himmels-Meridian eines Punctes A mit dem eines andern A′ macht, heißt die geographische Länge des Punctes A von A′ her, und diese Länge ist östlich oder westlich, je nachdem der Winkel östlich oder westlich von A′ gebildet wird. Wenn man z. B. sagt, ein Punct habe 23° östliche Länge von Berlin,

Digitized by Google

so heißt dieses: der Himmels-Meridian des Punctes macht von Westen nach Osten hin einen Winkel von 23° mit dem Himmels-Meridiane von Berlin.

Zwei Puncte haben immer von einander zugleich eine östliche und eine westliche Länge, welche zusammen 360° ausmachen.

Alle Puncte, welche auf dem nämlichen Erd-Meridiane liegen, haben einerlei Länge, von welchem andern Puncte her diese auch gezählt sei.

84) Die kürzeste Linie, welche man von einem Puncte zum andern auf der Erdoberfläche ziehen kann, heißt eine geodätische Linie *).

Wenn Fig. XIII. A, B, zwei Puncte der Erde, MAN der Erd-Meridian von A, und AB eine geodätische Linie bedeutet, so heißt der Winkel BAM der nördliche Azimuth, und BAN der südliche Azimuth der Linie AB im Puncte A, oder auf dem Horizonte von A. Statt dieses sagt man auch öfters: der Azimuth des Punctes B auf dem Horizonte von A.

---

*) Diese Erklärung einer geodätischen Linie ist fast allgemein angenommen, und, wie wir sogleich zeigen werden, die richtigere. Nichts desto weniger haben Geodäten, worunter uns aber blos Herr Tralles durch eine in den Denkschriften der Königl. Academie zu Berlin abgedruckte Abhandlung bekannt ist, eine Ausnahme gemacht, und die geodätische Linie von A nach B als die Durchschnittslinie betrachtet, welche auf der Erdfläche entsteht, wenn man durch die Verticale von A und den Punct B eine Ebene legt. Diese Definition kann indessen nur zugelassen werden, wenn man die Erde kugelförmig annimmt. Denn sobald man sie als eine sphäroidische Fläche betrachtet, können nach der besagten Definition zwei geodätische Linien von A nach B neben einander gezogen werden, weil man die Ebene, welche den Durchschnitt bilden soll, eben so wohl durch die Verticale von B als durch die von A legen kann, wodurch im Allgemeinen verschiedene Linien erzeugt werden, wie wir es später sehen werden. So hätte dann der Punct B zwei verschiedene Azimuthe auf dem Horizonte von A und die Verbindung mehrerer Puncte durch geodätische Linien wäre etwas ganz Unbestimmtes, welches in keinem Falle seyn darf.

Hingegen ist unsere Definition ohne alle Zweideutigkeit, und es ist auch ganz der Natur gemäß von einem Puncte zum anderen auf dem kürzesten Wege zu gelangen.

Digitized by Google

Zweiter Theil.

Erstes Kapitel.

Von den geodätischen Operationen überhaupt, und von der Verrichtung derselben, in der Unterstellung, daß die Erde vollkommen sphärisch sei.

Von der unmittelbaren Messung der geodätischen Linien u. ihrer Winkel.

85) Da Alles, was in diesem Kapitel vorkömmt, unterstellt, daß die Erde eine Kugel sei, deren Centrum auf der Mitte der Erdachse ist, so wollen wir zuerst dasjenige, was in dem letzten Kapitel des ersten Theils gesagt ist, auf diese Hypothese anwenden.

1. Die Erdachse ist ein Durchmesser der Kugel, und die Pole sind seine Endpuncte.

2. Die Verticale eines Punctes ist der Radius der Kugel, welcher durch diesen Punct geht.

3. Der Erd-Equator ist ein größter Kreis, und seine Ebene ist mit der des Himmels-Equators einerlei.

4. Jeder Erd-Meridian ist ein größter Kreis, welcher durch die Erdpole geht, und seine Ebene ist die nämliche wie die Ebene des Himmels-Meridians, der ihn erzeugte.

5. Jeder Erd-Parallelkreis ist ein kleiner Kreis der Erdkugel, dessen Ebene mit der des Erd-Equators parallel ist.

6. Die Breite eines Punctes ist dem Bogen des Meridians dieses Punctes gleich, welcher zwischen dem Puncte selbst, und dem Equator liegt.

Digitized by Google

7. Die Länge eines Punctes von einem andern her, ist die Anzahl Grade des Bogens des Equators, oder jedes Parallelkreises, welcher zwischen den Meridianen der beiden Puncte liegt.

8. Eine geodätische Linie ist der Bogen eines größten Kreises, weil dieser der kürzeste ist, den man zwischen zwei Puncten auf der Kugelfläche ziehen kann.

86) Jede geodätische Operation hat zum Zwecke, die Lage mehrerer Puncte der Erde gegen einander zu bestimmen. Hierzu denkt man sich die Meeresfläche um die ganze Erde ausgebreitet; zieht dann von jedem der zu bestimmenden Puncte auf diese Fläche eine Normale, und erhält so die Projectionen der gegebenen Puncte auf die Meeresfläche, welche in unserer Unterstellung eine Kugelfläche ist. Bestimmt man nun sowohl die Lage dieser Projectionen gegen einander, als auch die Höhen der Puncte über der Meeresfläche, so ist die Lage der Puncte selbst vollkommen gegeben.

Eine Figur, welche die Lage der Projectionen mehrerer Puncte gegen einander angiebt, heißt eine Charte.

Eine Figur, welche nur hauptsächlich die Höhen der Puncte über einander zeigt, heißt ein Profil.

Wir werden zuerst von denen geodätischen Operationen sprechen, welche dazu dienen, die Lage mehrerer Puncte auf der Meeresfläche gegen einander zu bestimmen.

87) Zu diesem Zwecke werden die gegebenen Puncte so durch geodätische Linien verbunden, daß man immer von dem einen zu dem andern durch eine Kette von Dreiecken kommen kann; diese Dreiecke bilden zusammen, was man ein trigonometrisches Netz nennt, und sind in der Unterstellung, welche wir hier machen, sphärische Dreiecke. Wenn diese bekannt sind, so ist auch dadurch die Lage der gegebenen Puncte gegen einander vollkommen bestimmt.

Ein trigonometrisches Netz, wie jede andere vielseitige Figur, kann auf mancherlei Art durch die Messung von Seiten und Winkeln bestimmt werden; da aber die Winkel-Meßinstrumente, welcher man sich bedient, weit vollkommener und leichter zu gebrauchen sind, als diejenigen, mit denen man Linien mißt, so muß man nothwendig suchen, bei der Aufnahme (Bestimmung) eines trigonometrischen Netzes so wenige Linien als möglich zu messen. Man läßt es daher bei der Bestimmung einer einzigen solchen Linie bewenden; mißt sodann alle Winkel der Dreiecke, und berechnet hieraus die übrigen Seiten derselben.

Digitized by Google

Wir wollen nun vor Allem zeigen, wie man eine geodätische Linie unmittelbar messen kann.

88) Die Länge der geodätischen Linie, welche man unmittelbar messen will, hat in der ganzen Berechnung des trigonometrischen Netzes Einfluß; man nennt sie daher die Basis des Netzes. Da durch einen Irrthum, welchen man bei der Messung derselben begienge, alle Linien des Netzes, ohne irgend eine Compensation, fehlerhaft würden, so ist es nothwendig bei der Bestimmung einer Basis die größte mögliche Genauigkeit anzuwenden.

Wir wollen in Folgendem kurz den Weg zeigen, welchen man bei der Messung der Basis von Melun *), die man als eine der genauesten bisher gemachten ansehen kann, befolgt hat.

a) Wahl der Puncte.

Die Puncte zwischen welchen die geodätische Linie gemessen werden soll, können nicht auf der Meeresfläche genommen werden; man muß daher die Messung auf der unregelmäßigen Erdfläche vornehmen, und nachher die Entfernung der Projectionen der gegebenen Puncte aus dem Gemessenen zu berechnen suchen.

Hierzu ist es zweckmäßig, die Puncte so zu wählen, daß zwischen denselben keine bedeutende Unregelmäßigkeiten des Terrains Statt finden, und daß ihre Höhen über der Meeresfläche nicht viel und nur um so viel verschieden seien, daß man von dem einen den andern leicht sehen könne.

Ob die gewählten Puncte die genannten Eigenschaften haben, erfährt man auf folgende Art: A und B (Fig. XIV.) seien die gegebenen Puncte; $A\alpha$, $B\beta$ ihre Verticalen; $\alpha\beta$ die verlängerte Meeresfläche und folglich α, β, die Projectionen von A, B. Wenn dann A und B, sowie auch alle Puncte der Erdfläche zwischen A und B, z. B. x, y, z, gleich hoch über der Meeresfläche liegen, so ist der Boden zwischen A und B vollkommen regelmäßig zu nennen. In diesem Falle ist die Linie AxyB mit der geodätischen Linie $\alpha\beta$ parallel, und dieses muß also auch für zwei Ebenen, deren eine in A an der Erdfläche, und die andere in α an der Meeresfläche eine tangente ist, Statt haben. So wie man nun die in α tangente Ebene den Horizont von α nennt, wollen wir die in A gezogene den Horizont von A, und jede Linie, welche in derselben liegt, eine Horizontallinie, nennen.

*) Diese Basis ist eine von den Grundlagen aller Operationen, welche zur Bestimmung des Meters gemacht wurde.

Digitized by Google

Es ist aber klar, daß man den Punct B von A aus nur dann erst sehen kann, wenn B über dem Horizonte von A liegt; sind also A und B weit von einander entfernt, so muß B bedeutend höher als A über der Meeresfläche liegen.

Die Erfüllung der obigen Bedingungen erfordert also, daß die Entfernung AB nicht sehr groß sei, und daß eine gerade Linie, welche von A nach B geht, nicht weit von einer Horizontallinie abweiche. Will man sich daher von der Zweckmäßigkeit der Puncte A, B versichern, so bringt man in A ein Instrument, welches die Richtung der Horizontallinie angiebt, und sieht dadurch, ob AB wirklich von derselben nicht zu viel absteht.

b) Abstecken der geodätischen Linie. (Siehe Fig. XIV)

Die geodätische Linie zwischen A und B abstecken, heißt zwischen A und B mehrere Puncte x, y, z..... angeben, deren Verticalen durch die geodätische Linie $\alpha\beta$ gehen.

Hierzu bedient man sich des bekannten Wiederholungskreises, oder jedes andern Scheiben-Instrumentes, dessen Scheibe sich in eine verticale Stellung bringen läßt, und in dieser Lage um eine verticale Achse herumgedreht werden kann. Dieses Instrument bringt man in A, und stellt es so auf, daß die Achse in die Richtung der Verticale Aα, und die Scheibe in eine verticale Ebene kömmt. Visirt man dann mit dem Diopter nach B, so bringt man dadurch die Scheibe in die Ebene AαB, wo die geodätische Linie auch liegt. Nachdem man das Instrument in dieser Stellung festgesetzt hat, kann man durch die Neigung des Diopters die Puncte x, y, z bezeichnen, welche in der Ebene A$\alpha\beta$B liegen, und daher die oben verlangte Eigenschaft haben müssen. Die so eben angegebenen Puncte werden mit Pfählen bezeichnet, deren Errichtung der Beobachter in A dirigirt; da aber die hierzu nothwendigen Signale auf eine große Entfernung undeutlich werden, so begnügt man sich, von A aus einige Puncte anzugeben, begiebt man sich nachher mit dem Instrumente an einen derselben, von woher man, auf die nämliche Art wie in A, neue Puncte bestimmen kann.

c) Die Instrumente zum Messen der Länge der Basis, waren Liniale von Platina, weil dieses Metall, durch die Einwirkung der Wärme, Feuchtigkeit und Luft, unter allen am wenigsten alterirt wird.

Die Länge der Liniale war bei einer bestimmten Temperatur sehr genau bekannt, und man hatte beobachtet, um wieviel Theile seiner Länge sich das Platina bei einer Temperatur-Erhöhung von einem Grade des hundertheiligen Thermometers ausdehnte; die Ausdehnungen durfte man, den Erfahrungen gemäß, mit der Anzahl Grade der Temperatur-

Digitized by Google

Erhöhung proportionirt annehmen, so daß man leicht berechnen konnte, um wieviel das Linial länger oder kürzer geworden war, wenn man seine Temperatur kannte. Da man nicht immer unterstellen konnte, daß die Temperatur der Luft auch durchaus jene des Metalls wäre, so suchte man Mittel um letztere genau angeben zu können; dies geschah mit Hülfe des sogenannten metallischen Thermometers; seine Einrichtung bestand darin, daß auf die Liniale von Platina andere kürzere von Kupfer aufgelegt wurden, welche an dem einen Ende mit den ersten durch Schrauben fest verbunden waren, an dem anderen Ende hingegen, wenn sie sich mehr als die Liniale von Platina ausdehnten, frei über diese gleiten konnten. Indem man nun diese Instrumente verschiedenen Temperaturen aussetzte, mußte man für jede einen verschiedenen Abstand der Ende der Liniale bemerken, weil das Kupfer sich weit mehr ausdehnt als das Platina; und so konnte man durch eine Reihe von Beobachtungen finden, wie man aus dem Abstande der Ende der Liniale, auf die Anzahl Grade der Temperatur des Instruments schließen mußte; den Abstand selbst fand man auf einer sehr genauen Eintheilung, welche in das Platina eingeschnitten, und mit einem dazu gehörigen, auf dem Kupfer befindlichen, Verniere (Nonius) versehen war.

Um den Stoß beim Aneinandersetzen der Liniale zu vermeiden, durfte man dieselben nicht in unmittelbare Berührung bringen, sondern ihr Zwischenraum wurde mit einem kleinen Auszuge, welcher sehr genau abgetheilt, und mit einem Verniere versehen war, ausgemessen.

Fig. XV. ist AB das Linial von Platina mit dem kupfernen Liniale und dem halb hervorgezogenen Auszuge versehen; Ax ist das kupferne Linial; $\delta\varepsilon$ die Eintheilung und πx der Vernier des metallischen Thermometers; $\beta\gamma$ der Auszug, welcher in das Linial von Platina eingelassen ist, und in der Vertiefung $\alpha\beta$ hin und her bewegt wird; nm ist der zugehörige Vernier.

Die Liniale ruheten auf ebenen Blöcken, und waren mit einer Art von Dach bedeckt, welches einige Zoll hoch über denselben herlief; die Kante des Daches war genau in der Richtung des Liniales, und an den Enden derselben, waren aufrecht stehende eiserne Spitzen angebracht, welche dazu dienen sollten das Linial in die Richtung der geodätischen Linie zu bringen.

Das Ganze stand auf Füßen, welche mit drei Stellschrauben versehen waren, um das Linial so viel als die Neigung des Bodens es erlaubte, in eine horizontale Lage zu bringen.

Digitized by Google

d) Gebrauch der Liniale.

Von den eben beschriebenen Instrumenten hatte man viere, welche man nach einander in die Richtung der geodätischen Linie setzte; war dieses geschehen, so wurde das erste weggenommen, und vor das letzte gebracht, bis man auf diese Art den zweiten Endpunct der Linie erreicht hatte.

Der Winkel, den jedes Linial mit der Horizontallinie machte, wurde mit einer Art von Setzwage gemessen.

e) Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man von A nach B Fig. XVI. in einer gebrochenen Linie ACDEFGHIB gelangte, deren Seiten hier die Liniale mit den Auszügen sind.

Es sei nun Axyz....w mit der geodätischen Linie $\alpha\beta$ parallel, so werden, nach den Bedingungen in a), die Puncte CDE....B nicht bedeutend hoch über dieser Parallele liegen. Das Erste, womit wir uns nun beschäftigen wollen, ist, aus den Angaben der Messung, die Länge der Linie Axy....w zu berechnen.

Hierzu ziehe man aus den Puncten C, D, E, F, G... die Linien Co, Dp, Eq, Fr etc... mit den correspondirenden xy, yz, zl,... parallel, bis sie die Verticalen Dδ, Eε, Fη, GΘ etc.... begegnen. Da nun in so kleinen Entfernungen wie Ax, xy, yz,... die Krümmung der geodätischen Linie durchaus unmerklich ist, so wird man ohne Irrthum die Linien Ax, xy, yz... und Co, Dp, Eq.... als gerade ansehen können. Da ferner wegen der Größe des Erdehalbmessers, zwei nahe Verticalen, und besonders kleine Stücke derselben, als parallel betrachtet werden können, so darf man Co=xy, Dp=yz, Eq=zl... setzen.

Wir betrachten also die Dreiecke ACx, CoD, DEp.... als geradlinige und rechtwinkelige, und nehmen an, daß die Summe Ax+Co+Dp+....=Aw sei.

Weil man nun $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$,.... als gerade ansieht, so sind diese Linien verlängert als Tangenten an die geodätische Linie zu betrachten, und folglich werden ihre parallelen Ax, Co, Dp... Horizontallinien seyn; mithin sind nach d) die Winkel CAx, oCD, EDp... gegeben.

Da aber auch AC, CD... gemessen sind, so findet man leicht: Ax=AC cos CAx, Co=xy=CD cos oCD, Dp=yz=DE cos EDp u. s. w..... Nach c) und a)

Digitized by Google

sind die Winkel CAx, oCD,... fast immer sehr klein; es ist dann

$AC - Ax = AC(1 - \cos CAx) = 2 . AC . \sin^2 \frac{CAx}{2}$. Ist $CAx = V''$, so ist

$AC - Ax = 2AC . \frac{V''^2}{4} . \sin^2 1''$.

Die Summe aller Differenzen dieser Art, ist der Unterschied der Linie ACDE.....B und der Axy....w. Diesen Unterschied nennt man die Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont.

f) Reduction der Linie auf die Meeresfläche.

Es bleibt uns noch übrig, die Länge der wahren geodätischen Linie $\alpha\beta$ zu finden.

Die Länge von Aw heiße a, die von $\alpha\beta$, x. $A\alpha = w\beta$ sei $= h$ und der Radius der Erde sei R.

Da Aw und $\alpha\beta$ concentrische Kreisbogen sind, so ist $a:x = R+h:R$, weil diese Bogen sich wie ihre Radien verhalten; also:

$x = \frac{aR}{R+h}$ und $a - x = \frac{ah}{R+h} = \frac{\frac{ah}{R}}{1+\frac{h}{R}} = \frac{ah}{R}\left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} .....\right)$ Weil nun die Höhe h immer sehr klein in Vergleich mit R ist, so kann man $a - x = \frac{ah}{R}$ setzen. Dieser Werth heißt die Reduction auf die Meeresfläche.

Es ist leicht zu sehen, daß man zur Berechnung dieser Reduction weder einen genauen Werth von h noch einen von R nöthig hat. Wie man die Höhen der Puncte A und B über der Meeresfläche findet, zeigen wir im letzten Kapitel.

g) Recapitulation aller zu machenden Rechnungen.

Aus der Messung erhält man folgende Data:

1. Anzahl der Liniale, welche auf die Basis gehen.
2. Für jedes Linial die Länge des zugehörigen Auszuges.
3. Die Temperatur jedes Liniales in Theilen des metallischen Thermometers.
4. Die Neigung jedes Liniales gegen den Horizont.
5. Die Höhe der Basis über der Meeresfläche. —

Vorher müssen bekannt seyn:

1. Die Ausdehnung des Platina für eine bestimmte Temperaturerhöhung; ist diese in Graden des gewöhnlichen Thermometers ausgedrückt, so muß man:

Digitized by Google

2. Die Beziehung der Grade zu den Theilen der metallischen Thermometer kennen.

3. Die Länge der Liniale bei einer gegebenen Temperatur muß ganz genau bestimmt seyn. —

Um nun die Länge der Basis zu berechnen, müssen zu der Summe der Liniale folgende Zahlen addirt werden.

1. Die Summe der Auszüge.

2. Die Summe der Ausdehnungen jedes Liniales durch den Ueberschuß der Temperatur desselben über die Temperatur, bei welcher die Liniale die bekannte Länge haben.

Diese Temperaturcorrection berechnet man sehr kurz, wenn man beobachtet, daß die Ausdehnung der Auszüge durch die Wärme gar nicht in Betracht gezogen zu werden verdient.

Man nenne dann l die genau bekannte Länge eines jeden Liniales bei der Temperatur a; t, t', t'' .... seien die Temperaturen der Liniale, deren Anzahl n heiße; dann ist die Ausdehnung eines Liniales gleich: (Ausdehnung für 1 Grad) × (t — a); da aber die Liniale alle gleich lang sind, (und dieses besonders, weil man hier die Auszüge außer Betracht läßt), so ist die Ausdehnung für einen Grad, welche wir ε nennen, für alle Liniale die nämliche; mithin die Summe aller Ausdehnungen der Liniale gleich: $\varepsilon \times (t + t' + t'' \ldots - na)$ oder $n\varepsilon \times \left(\frac{t + t' + t'' \ldots}{n} - a\right)$; das heißt: man erhält die Summe der Ausdehnungen der Liniale, wenn man die Ausdehnung eines Linials für 1 Grad des Thermometers mit der Anzahl der Liniale, und dieses Product mit dem Ueberschuß der mittleren Temperatur derselben über die Temperatur a multiplicirt.

Da nun die Basis so viel weniger enthält, als die Liniale sich ausgedehnt haben, so muß diese Ausdehnung zu dem Gefundenen addirt werden. —

Von der Summe der Liniale müssen abgezogen werden:

1. die Reduction auf die Meeresfläche,

2. die Reduction auf den Horizont. —

h) Es ist nützlich zu wissen, wie lang die Sehne des Bogens ist, welchen die Basis bildet; hierzu bemerke man, daß dieser Bogen sehr klein in Vergleich des Radius ist. Es sei R der Radius, a der Bogen, und b die Sehne; so ist $\frac{b}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$, wenn α die Anzahl Grade von a bedeutet. Nun ist $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R} \frac{a^3}{2.3.8.R^3} + \ldots$, indem $\frac{a}{R}$ den Bogen α

Digitized by Google

in Theilen des Radius ausdrückt. Es ist also $b = a\left(1 - \frac{a^2}{24 \cdot R^2}\right)$ oder $a - b = \frac{a^3}{24 \cdot R^2}$, welches im gegenwärtigen Falle eine sehr kleine Größe ist, die man ohne genaue Kenntniß von R berechnen kann. Man nennt sie die Reduction auf die Sehne.

i) Werthe der verschiedenen Reductionen bei der Basis von Melun.

Um eine Idee von dem Betrage der nöthigen Reductionen zu geben, wollen wir ihre Werthe in der Basis von Melun, welche etwas über 6076 Toisen betrug, hier angeben.

	tois.
Die Auszüge betrugen zusammmen	+ 34,260683
Die Temperaturcorrection	+ 0,249128
Die Reduction auf die Meeresfläche	— 0,07627
Die Reduction auf den Horizont	— 0,328901
Die Reduction auf die Sehne	— 0,000876.

k) Recension der ganzen Operation.

Wir wollen nun untersuchen, welche Irrthümer man bei der eben auseinandergesetzten Verfahrungsart zu befürchten habe.

1. In wie weit ist es richtig, so wie wir es in e) gethan haben, die Bogen Ax, Co, Dp..... Fig. XVI. als gerade Linien anzusehen?

Die Längen AC, CD... betrugen in der Basis von Melun ohngefähr eine Toise; also Co, Dp... auch ohngefähr soviel; der Unterschied eines Bogens von 1 Toise und seiner Sehne ist aber $\frac{1}{24 \cdot R^2}$; solcher Bogen waren 6076; also beträgt das, was man vernachläßigte: $\frac{6076 \text{ Toisen}}{24 \cdot R^2}$; dieses ist $(6076)^2$ mal kleiner, als die Reduction der ganzen Basis auf die Sehne, indem die Basis 6076 Toisen enthält. Das Vernachläßigte ist daher nur $\frac{0{,}000876}{(6076)^2}$, welches gar nicht in Rechnung gebracht zu werden verdient.

2. Welcher Irrthum kann dadurch entstehen, daß man in e) die Linien Co, Dp,... denen xy, yz.... gleich setzte?

Wenn man sich durch B einen Bogen mit Aw parallel und bis zur Verticale von A gezogen denkt, so ist der zu berechnende Irrthum noch immer kleiner als der Unterschied dieses Bogens mit Aw. Nennt man nun die Höhe von B über A, n, so ist nach f) der Unterschied

Digitized by Google

von Aw und dem neuen Bogen gleich dem neuen Bogen multiplicirt mit $\frac{u}{R}$ oder beinahe gleich: Basis $\times \frac{u}{R}$.

Die Reduction auf die Meeresfläche ist $Aw \times \frac{h}{R}$ oder beinahe Basis $\times \frac{h}{R}$; mithin ist der gesuchte Irrthum so vielmal kleiner als die Reduction auf die Meeresfläche, wievielmal u kleiner als h ist.

Wenn man daher die Puncte A und B fast gleich hoch über der Meeresfläche annimmt, so wird dieser Irrthum unbedeutend.

Wir schließen also endlich, daß bei der Messung der Basis nur solche Irrthümer zu befürchten sind, welche von der Unvollkommenheit der Instrumente, oder von einem Mangel an Kenntniß von der wahren Gestalt der Erde, herrühren. In wieweit die letztern Statt haben können, werden wir später zeigen.

88) (bis). Da denjenigen, welche eine Basis messen wollen, wohl selten die Mittel zu Gebot stehen möchten, welche man bei der Basis von Melun anwendete, so wollen wir noch eine andere, durch die Einfachheit des Verfahrens äußerst merkwürdige Messung kurz beschreiben.

Die Instrumente, deren man sich bediente, waren fünf Stangen von Tannenholz, welche man in Oel gesotten hatte, um sie gegen den hygrometrischen Einfluß der Luft zu schützen. Jede dieser Stangen war ohngefähr 5 Metres lang. Man schraubte sie mit ihren Enden zusammen, und bildete so einen Maaßstab von etwa 25 Metres, welcher immer auf einmal und genau in horizontaler Richtung aufgetragen wurde, weshalb man ihm auch den Namen Auftrag beilegte. Um die Schwenkungen und Biegungen dieses Maaßes zu vermeiden, wurde dasselbe in gehörigen Entfernungen unterstützt. Der Auftrag war abgetheilt, so daß man Zehntausendtheile desselben ablesen konnte. Man fand, daß die Basis 866,1486 Aufträge enthielt, und man hatte sorgfältig jedesmal die Temperatur der Luft aufgezeichnet, bei welcher ein Auftrag gelegt wurde.

Sollte nun die Länge der Basis in Metern bestimmt werden, so mußte man wissen

1) Wieviel Meter der Auftrag enthielt,

2) um wieviel sich derselbe für einen Grad Temperaturerhöhung ausdehnte.

Digitized by Google

Hierzu bediente man sich eines vorläufigen Meters, welcher von Kupfer und bei 10 Grad Wärme gleich 443,44 Linien war, da hingegen der genaue Meter 443,296 Linien enthält.

Um nun die Länge des Auftrages und seine Dilatation durch die Wärme zu bestimmen, wandte man folgende sinnreiche Mittel an.

Es wurden in den Boden zwei starke unbiegsame Pfähle, in einer etwas über 25 Metres betragenden Entfernung von einander, geschlagen, und diese Entfernung bei drei sehr verschiedenen Temperaturen mit dem provisorischen Meter gemessen. Man fand sie bei

Gr.		Met.
9,375	gleich	25,08771
26,25	. . . . .	25,07884
16,66	. . . . .	25,08386.

Nimmt man nun die Länge des vorläufigen Meters bei 10 Gr. als Einheit an, nennt man D die Ausdehnung desselben für 1 Gr. Temperaturerhöhung, und E die Entfernung der Pfähle in den angenommenen Einheiten ausgedrückt, so liefern die drei angeführten Versuche die Gleichungen:

$E = 25{,}08771\,(1 + D(9{,}375 - 10))$

$E = 25{,}07884\,(1 + D(26{,}25 - 10))$

$E = 25{,}08386\,(1 + D(16{,}66 - 10))$, welche zur Bestimmung von E und D mehr als hinreichend sind, und für jede dieser Größen drei Werthe geben, zwischen welchen man die Mittel nimmt und so $D = 0{,}0000209588$, $E = 25{,}08737$ findet.

Nun wurde die Länge des Auftrages bei 10 Grad und seine Ausdehnung für 1 Grad Temperaturerhöhung folgendermaaßen gefunden.

Man beobachtete, daß bei 9,375 Gr. der Ueberschuß von E über den Auftrag = 0,09228 Metres.

und bei 26,25 . . . . . = 0,09028 war.

Behalten wir dann die vorige Einheit bei, und nennen A die Länge des Auftrages bei 10 Gr. und Δ seine Ausdehnung für 1 Gr., so erhalten wir die Gleichungen:

$E = A - 0{,}625 \cdot \Delta + 0{,}09228$

$E = A + 16{,}25 \cdot \Delta + 0{,}09028$, woraus man

$\Delta = 0{,}00011852$ und $A = 24{,}9951$ zieht.

Nach dem, was wir im vorhergehenden Paragraphen gesagt haben, wird nun alles Uebrige so leicht zu verrichten seyn, daß keine fernere Erklärung desselben nöthig ist.

Digitized by Google

89) Den Winkel zweier geodätischen Linien zu finden.

A, B, C, Fig. XVII. seien drei Puncte auf der unregelmäßigen Erdfläche; a, b, c ihre Projectionen auf die Fläche des Meeres; man soll die Winkel der Bogen ab, ac, welche Theile von größten Kreisen sind, oder den Winkel der Tangenten aS, aT bestimmen. Dieses erfordert folgende Operationen:

a) Unmittelbare Messungen.

Man begiebt sich in A, und mißt mit einem dazu eingerichteten Instrumente, am besten mit dem Wiederholungskreise, den Winkel BAC, und die Winkel, welche die Linien AB, AC, mit der Verticale von A machen, nämlich BAZ, CAZ; die Puncte B und C sind meistens von A so weit entfernt, daß die Höhe dieser Puncte über dem Horizonte von A gegen die Entfernungen BA, CA, sehr klein ist; daraus folgt, daß die Winkel BAZ, CAZ von 90° sehr wenig verschieden sind. Diese Winkel nennt man auch die Zenithaldistanzen der Puncte B und C von A her genommen, oder die Entfernungen der Puncte B, C von dem Zenithe des Punctes A.

b) Reduction des Winkels BAC auf den Horizont.

Unsere Aufgabe ist nun, aus dem Gemessenen den Winkel TaS zu berechnen.

Wenn man in den Ebenen ZACSa, ZABTa, die Linien AM und AN mit aT und aS parallel zieht, so ist MAN = TaS und MA und NA stehen auf AZ senkrecht, so daß der Winkel MAN dem Winkel der Ebenen ZAC, ZAB gleich ist.

Man beschreibe aus A, als Centrum, mit einem willkührlichen Radius AZ eine Kugelfläche, so wird diese die drei Ebenen BAC, ZAB, ZAC, in den drei Bogen KI, ZK, ZI schneiden, und so das sphärische Dreieck IZK bilden, in welchem ZI = ZAC, ZK = ZAB, IK = BAC, und Z = MAN ist. Die Aufgabe ist also: in einem sphärischen Dreiecke, wo zwei Seiten nicht weit von 90° sind, den Winkel, welchen diese beiden Seiten einschließen, aus den drei Seiten zu finden.

Nennt man ZAC = δ, ZAB = δ' *) und BAC = a, so erhält man aus (71)

$$MAN - BAC = \left(\frac{\delta + \delta' - 180^\circ}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \sin 1'' - \left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}a \sin 1'',$$

wo $\delta + \delta' - 180^\circ$ und $\delta - \delta'$ in Secunden ausgedrückt seyn müssen. (S. die Anwendung in (213).)

*) Das δ' heißt hier nicht δ Minuten, sondern der Accent ist nur da um dieses δ von dem andern zu unterscheiden.

Digitized by Google

Wie weit dieſe Formel zuverläßig gebraucht werden könne, ſiehe in (72).

Den Unterſchied MAN—BAC nennt man die Reduction auf den Horizont, weil die Ebene MAN der Horizont von A iſt.

c) Reduction auf das Centrum der Stellung oder Centriren des gemeſſenen Winkels.

Oft iſt es der Fall, daß man das Inſtrument nicht genau an die Spitze des zu meſſenden Winkels ſtellen kann; man muß ſich dann an einen der Spitze des Winkels *) ſehr nahe gelegenen Punct begeben. Der Winkel, den man an dieſem Orte mißt, bedarf einer Correction, welche man Reduction auf das Centrum der Stellung nennt, und die wir hier berechnen wollen.

In Fig. XVIII. ſei BAC der zu meſſende Winkel, p der Punct, wo man genöthigt iſt ſich hinzuſtellen. Man ſetze pA=d, BpA=y, AB=l, AC=r, BAC=A, BpC=p, und ſuche A—p in der Unterſtellung, daß d gegen l und r ſehr klein ſei.

Es iſt K=A+B=p+C, woher A—p=C—B; ferner $\frac{\sin C}{d}=\frac{\sin(p+y)}{r}$, $\frac{\sin B}{d}=\frac{\sin y}{l}$. Da nun C und B ſehr kleine Winkel ſind, ſo kann man $\sin C = C \sin 1''$ und $\sin B = B \sin 1''$ ſetzen. Mithin $C=\frac{d.\sin(p+y)}{r \sin 1''}$, $B=\frac{d.\sin y}{l.\sin 1''}$ und $C-B=A-p=\frac{d.\sin(p+y)}{r.\sin 1''}-\frac{d.\sin y}{l.\sin 1''}$. Zur Berechnung dieſer Reduction iſt es nicht nöthig genaue Werthe von r und l zu haben, indem kleine Irrthümer in denſelben noch mit sin 1″ multiplicirt, und daher außer Einfluß gebracht werden.

Wäre die Lage der Puncte wie Fig. XIX. geweſen, ſo hätte man, um die vorhergehende Formel anwenden zu können, unter y auch wie vorhin den Winkel von pA mit pB, allein den erhabenen Winkel, verſtehen müſſen. (Siehe die Note in (210) und die Anwendung (212).)

---

*) Es iſt zu bemerken, daß hier unter der Spitze des Winkels jeder Punct verſtanden werden kann, welcher auf der Verticale des eigentlichen Signal-Punctes liegt. So kann z. B., wenn man den Gipfel eines ſenkrechten Thurmes als Signal angenommen hat, der Mittelpunct des Thurmes in jeder beliebigen Höhe als das Centrum der Stellung angeſehen werden, und dieſes offenbar aus der Urſache, weil man alle Winkel auf den Horizont reduzirt.

Man darf alſo in dem Folgenden annehmen, als lägen p und A auf der nämlichen Horizontale, und dem gemäß muß man ſich die Entfernung d und den Winkel y gemeſſen denken.

Digitized by Google

Anmerkung. Man kann den Punct p so wählen, daß die hier berechnete Correction Null sei. Hierzu muß $l \sin(p+y) = r \sin y$ seyn. Aus dieser Gleichung zieht man $\text{tang } y = \frac{l \sin p}{r - l \cos p}$, woher man y so finden kann, daß $A - p = o$ ist.

90) Nachdem man in einer Kette von Dreiecken eine Basis und alle Winkel kennt, bleibt noch übrig die Seiten der Dreiecke zu berechnen. Diese Seiten sind alle in Rücksicht des Radius der Erde sehr klein, und können nie die Größe erreichen, welche sie nach (69) haben müßten, damit die Regel von Legendre (68) bei ihrer Auflösung nicht mehr anwendbar wäre; denn 2°,55′ ist eine Entfernung von mehr als 70 Stunden *), in welcher man die höchsten Puncte der Erde nicht mehr sieht. Auflösung der Dreiecke eines trigonometrischen Netzes.

Wir lösen daher alle Dreiecke, welche in einem trigonometrischen Netze vorkommen, nach der eben genannten Regel auf. Die Berechnung des sphärischen Ueberschusses, dessen Kenntniß bei der Anwendung derselben nöthig ist, scheint überflüssig, wenn die drei Winkel des Dreieckes gemessen sind, wie dieses fast immer der Fall ist. Aber der Ueberschuß, welchen man aus den gemessenen Winkeln findet, wird von dem berechneten Ueberschusse meistens verschieden seyn. Dieser Unterschied kann von nichts anders, als von den Irrthümern der Beobachtungen herrühren. Die Berechnung des sphärischen Ueberschusses ist also ein Mittel, um die Summe der Irrthümer bei der Beobachtung der drei Winkel des Dreieckes zu finden. (Anwendung (216).)

Wären nun diese Winkel einander gleich, so könnte man mit vieler Wahrscheinlichkeit unterstellen, daß bei allen der nämliche Irrthum Statt gehabt habe, in so fern man annimmt, daß dieser Irrthum eine Folge der Unvollkommenheiten des Instrumentes ist. Man würde also in diesem Falle von jedem der gemessenen Winkel den dritten Theil der Summe der Irrthümer abziehen. Hierin liegt eine der Ursachen, weswegen man immer sucht die Dreiecke eines Netzes soviel als möglich gleichseitig zu haben. Wenn sie es aber auch nicht sind, so pflegt man doch die Vertheilung der Irrthümer auf die drei Winkel noch immer nach der vorigen Art zu machen, weil man keine andere angeben kann, die mehr Beifall verdiente, und weil durch diese Vertheilungsmethode die Berechnung des sphärischen Ueberschusses unnöthig wird, wie wir sogleich sehen werden.

*) Es ist hier von solchen Stunden die Rede, deren 25 auf einen Grad des Equators gehen.

Digitized by Google

91) Folgendes ist eine numerische Anwendung des Vorigen:

An den drei Orten, Namens: Lafagitière, Bort, Hermant, wurden folgende Winkel gemessen: (Siehe Fig. XX.) bei Hermant, aus dem Punct p der Winkel Laf:p:Bort, er ist $=75°,18',47'',535$. Um diesen Winkel auf das Centrum der Stellung zu reduziren, sind folgende Data:

Die Entfernung p . Hermant $=$ Met. $0{,}966$:

Der Winkel Bort:p:Hermant $=77°,36',52''$. Zur Reduction des Winkels auf den Horizont hat man die Zenithaldistanzen der Puncte Bort und Lafag: von p her gemessen, und sie sind $\delta=89°,58',12'',8$, $\delta'=90°,7',52'',95$.

Die beiden andern Winkel sind am Centrum der Stellung gemessen, nämlich bei Lafatigière: $69°;20',46'',96$. Für diesen Winkel sind zur

Reduction auf den Horizont: $\delta=90°,11',40'',5$; $\delta'=90°,11',3'',15$.

Der Winkel bei Bort ist: $35°,20',28'',91$ und $\delta=90°,10',52'',5$, $\delta'=90°,6',30'',4$.

Die genaue Entfernung von Hermant nach Bort ist Metres. $40290{,}3527$.

Das Erste, was man hier thun muß, ist, die Winkel auf das Centrum und den Horizont zu reduziren:

1. Bei Hermant.

Die Berechnung der Reduction auf das Centrum (90) c) unterstellt, daß die 4 Puncte p, Herm., Bort, Laf. in einer Ebene liegen. Obgleich nun dieses streng genommen nicht immer wahr ist, so wird doch, wegen der geringen Länge von pH und der sehr kleinen Neigung, welche die Ebene HBL gegen den Horizont hat, die Entfernung des Punctes p von der Ebene HBL so gering seyn, daß sie auf die Correction gar keinen Einfluß haben kann, welcher in Betracht gezogen werden müßte. Eben so wenig kann ein Irrthum geschehen, wenn man die in p gemessenen Zenithaldistanzen als in H genommen ansieht.

Um nun die Reduction auf das Centrum zu berechnen, müssen wir erst die Entfernung Hermant: Lafagitière ohngefähr kennen. Um diese zu finden, können wir den Winkel $p=H$ annehmen, die Reduction auf den Horizont überall vernachläßigen, und das Dreieck gleich einem geradlinigen auflösen.

Dann ist $\frac{(\text{Herm}:\text{Bort})}{(\text{Herm}:\text{Laf})}=\frac{\sin(\text{Laf})}{\sin(\text{Bort})}$, also: $(H:L)=\frac{(H:B)}{\sin . L}\cdot \sin B$.

Digitized by Google

$\log(\text{Herm}:\text{Bort}) = 4{,}6051473$

$-\log\sin(\text{Laf}) = 0{,}0288495$

$\log\sin(\text{Bort}) = \bar{1}{,}7622666$

$\log(\text{H}:\text{L}) = 4{,}3963134$

$(\text{H}:\text{L}) = 24906$ Metres. Eben so finden wir $(\text{L}:\text{B}) = 41650$ Metres. Für die Reduction auf das Centrum ist die Formel

$$\text{Herm.} - \text{p} = \frac{\text{d}\,.\sin(\text{p}+\text{y})}{\text{r}\,.\sin 1''} - \frac{\text{d}\,.\sin\text{y}}{\text{l}\,.\sin 1''},\ \text{und},$$

$\text{d} = 0{,}966$ Met., $\text{y} = 77°, 36', 52''$, $\text{p} = 75°, 18', 47''$.

$= 40290$ Metr. $\text{r} = 24906$ Metr. $\text{p}+\text{y} = 152°, 55', 39''$.

$\log\text{d} = \bar{1}{,}98498$	$\log\text{d} = \bar{1}{,}98498$
$\log\sin(\text{p}+\text{y}) = \bar{1}{,}65812$	$\log\sin\text{y} = \bar{1}{,}98977$
$-\log\text{r} = \bar{5}{,}60369$	$-\log\text{l} = \bar{5}{,}39480$
$-\log\sin 1'' = 5{,}31443$	$-\log\sin 1'' = 5{,}31443$
$0{,}56122$	$0{,}68398$

1ter Theil der Reduction $= 3'', 641$ 2ter Theil $= 4'', 83$

Reduction $= 3'', 641 - 4'', 83 = -1'', 189$

der gemessene Winkel $\text{p} = 75°, 18', 47'', 535$; also der aufs Centrum reduzirte $= 75°, 18', 46'', 346$; dieser Winkel muß nun auf den Horizont reduzirt werden; die Formel hierzu ist:

$x = \left(\frac{\delta+\delta'-180°}{2}\right)^2 \text{tang}\tfrac{1}{2}\text{a}\sin 1'' - \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}\text{a}\sin 1''$, welches x zu dem vorhin erhaltenen Winkel addirt werden muß.

Nun ist: $\delta = 89°, 58', 12'', 8$

$\delta' = 90°, 7', 32'', 95$

$$\frac{\delta+\delta'-180°}{2} = \frac{5', 45'', 75}{2} = 172'', 875$$

$$\frac{\delta-\delta'}{2} = \frac{9', 20'', 15}{2} = 280'', 075.$$

Digitized by Google

$2 \log 172,875 = 4,47546$	$2 \log 280,075 = 4,89454$
$\log \text{tang} \frac{1}{2} a = \bar{1},88743$	$-\log \text{tang} \frac{1}{2} a = 0,11257$
$\log \sin 1'' = \bar{6},68557$	$\log \sin 1'' = \bar{6},68557$
$\log$ 1ten Theils $= \bar{1},04846$	$\log$ 2ten Theils $= \bar{1},69268$
1ter Theil $= 0'',1118$	2ter Theil $= 0'',4929.$

Die gesammte Reduction auf den Horizont ist also $-0'',381$, folglich der Winkel bei Hermant $= 75°, 18', 45'', 965.$

2. Bei Lafatigière ist die Reduction auf den Horizont gleich $+1'',54$; daher der Winkel $= 69°, 20', 48'', 50.$

3. Bei Bort ist die Reduction $+0'', 22$, also der Winkel $= 35°, 20', 29'', 13.$

Wir gehen nun zu der Auflösung des sphärischen Dreieckes über. Obgleich wir, ohne die Berechnung des sphärischen Ueberschusses, die Summe der Irrthümer der Beobachtungen nicht finden können, so ist doch diese Berechnung, wegen der in (90) angenommenen Vertheilungsmethode dieser Irrthümer, nicht nothwendig; denn anstatt erst von jedem Winkel den dritten Theil der Irrthümer, und sodann den dritten Theil des wahren sphärischen Ueberschusses abzuziehen, kann man den dritten Theil von der Summe des sphärischen Ueberschusses und der Irrthümer abziehen; aber der sphärische Ueberschuß + den Irrthümern ist dem gleich, was die Winkel, so wie wir sie vorhin erhalten haben, zusammen mehr als 180° Grad betragen. Diese Winkel sind:

$H = 75°, 18', 45'', 965$
$L = 69°, 20', 48'', 50$
$B = 34°, 20' 29'', 13$
$\text{Zus.} = 180°, 00', 3'', 595$

Wir wollen also von jedem Winkel $\frac{3'',595}{3} = 1'',2$ abziehen, und dann das Dreieck wie ein geradliniges auflösen.

Die Winkel werden dann:

$H = 75°, 18', 44'', 76$
$B = 35°, 20', 27'', 94$
$L = 69°, 20', 47'', 30$

die bekannte Seite ist:
$(B.H) = 40290,3527$ Met.

Digitized by Google

$\text{Log}(B.H) = 4{,}6052011$	$\text{Log}(B.H) = 4{,}6052011$
$-\text{Log}\sin L = 0{,}0288492$	$-\text{Log}\sin L = 0{,}0288492$
$\text{Log}\sin H = \bar{1}{,}9855714$	$\text{Log}\sin B = \bar{1}{,}7622604$
$\text{Log}(B.L) = 4{,}6196217$	$\text{Log}(L.H) = 4{,}3963117$
$(B.L) = 41650{,}65$ Met.	$(L.H) = 24906{,}44$ Met.

(Eine andere Anwendung siehe in (214).)

92) Um die Längen und Breiten der Puncte eines trigonometrischen Netzes zu berechnen, muß man die Länge und Breite eines Punctes, und den Azimuth einer Seite, welche durch diesen Punct geht, kennen. Diese ersten Data werden astronomisch bestimmt; wie man das Weitere ausführt, wollen wir hier zeigen. (Siehe Fig. XXI.)

Von der Bestimmung d. geographischen Längen u. Breiten d. Puncte eines trigonometrischen Netzes, immer in der Unterstellung, daß die Erde sphärisch sei.

93) ABC und BCD seien zwei Dreiecke eines Netzes; AM, BN, CO, DP die Meridiane der Puncte A, B, C, D; die Länge und Breite des Punctes A, wie auch der Winkel BAM sind bekannt, man soll die Längen und Breiten der Puncte B, C, D, bestimmen.

Fig. XXII. sei AB das nämliche, wie in Fig. XXI.; so wird AB immer in Vergleich mit PA, PB sehr klein seyn, es sei denn, daß die Dreiecke, wovon die Rede ist, in der Nähe des Poles gelegen wären, welchen Fall wir hier außer Acht lassen. Das Dreieck PAB wird sich also wie dasjenige, welches wir in (73) betrachtet haben, verhalten. Der Bogen, den wir an dieser Stelle b nannten, ist hier AP; c ist $=$BA, $A=MAB$, $C=APB$, $B'=PBK$, $a=BP$.

Nennt man nun die Breite von A,.... λ; die von B,.... λ'

die Länge von A,....L; die von B,....L'

den Winkel MAB,....V; den KBN,....V', so ist $\lambda=AS$, $\lambda'=BT$, und da $PS=PT=90°$, so sind: $b=90°-\lambda$, $c=BA$, dem wir den Namen S (Seite) geben; $A=V$, $C=L'-L$, $B'=V'$, $a=90°-\lambda'$.

Die Anwendung der Formeln aus (73) giebt also, wenn man bemerkt, daß c in Theilen des Radius ausgedrückt ist, und folglich gleich $\frac{S}{R}$ gesetzt werden muß:

$$\lambda' = \lambda + \frac{S}{R}\frac{\cos V}{\sin 1''} - \frac{S^2}{R^2}\frac{\sin^2 V \tan\lambda}{2 \cdot \sin 1''} - \frac{S^3}{R^3}\cdot\frac{\sin 2V \sin V}{4 \sin 1''}\left(\tfrac{1}{3} + \tan^2\lambda\right)$$

Digitized by Google

$$L'-L=\frac{\sin V}{\cos\lambda\sin 1''}\left\{\frac{S}{R}+\tang\lambda\cos V\cdot\frac{S^2}{R^2}+\frac{S^3}{R^3}\left(\tfrac{1}{3}\cos^2 V+\tang^2\lambda\left(1-\tfrac{4}{3}\sin^2 V\right)\right)\right\}$$

$$V'-V=\frac{S}{R}\cdot\frac{\sin V\tang\lambda}{\sin 1''}+\frac{S^2}{R^2}\frac{\sin V\cos V}{\sin 1''}\left(\tfrac{1}{2}+\tang^2\lambda\right)+$$

$$+\frac{S^3}{R^3}\frac{\tang\lambda\cdot\sin V}{\sin 1''}\left\{\tfrac{5}{6}-\sin^2 V+\tang^2\lambda\left(1-\tfrac{4}{3}\sin^2 V\right)\right\}$$

Nun lassen sich aus dem Winkel NBK und den bekannten Winkeln der Dreiecke leicht die Azimuthe aller Seiten, welche durch B gehen, schließen. Z. B. Fig. XXI. ist DBN=NBK+KBD; aber KBD=180°—ABC—CBD, also DBN=180°+NBK—ABC—CBD; ebenso der Azimuth NBC=NBK+KBC, und KBC=180°—ABC, also CBN=180°+NBK—ABC.

Man hat also alle nöthige Dinge, um die Längen und Breiten der Puncte D, C ebenso von B aus zu bestimmen, wie man die Länge und Breite von B von dem Puncte A her fand, und so kann man bis zum Ende der Kette fortfahren.

Aus (75) bis) sieht man, daß in den obigen Formeln, wenn λ nicht weit von 45° abweicht, die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ erst dann beachtet zu werden verdienen, wenn S in Winkelmaaß ausgedrückt, mehr als 22′ beträgt. Nun sind aber 22′ mehr als 9 Stunden Weges, eine Länge, welche die Seiten der größten geodätischen Dreiecke selten erreichen; man wird sich daher meistens damit begnügen können, blos die Glieder mit $\frac{S}{R}$ und $\frac{S^2}{R^2}$ zu beachten. —

Wenn S als Bogen nur 2′, oder $\frac{5}{6}$ Stunden Weges ist, so kann man auch die Glieder mit $\frac{S^2}{R^2}$ weglassen.

93) bis) Folgendes ist eine Anwendung der vorigen Formeln.

Die Breite des Punctes A ist 48°, 50′, 13″=λ.

Die Entfernung AB . . . . . Met. 89764=S.

Der Winkel BAM . . . . . 154°, 8′, 20″=V.

Man fordert die Breite von B=λ', ferner den Längenunterschied der Puncte B und A=L′—L, und endlich den Winkel NBK=V′.

1. Berechnung von λ'; wir vernachläßigen die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$.

Digitized by Google

$\log S = 4{,}9531022$	$2 \log S = 9{,}90620$
$\log \cos V = \bar{1}{,}9541721$	$-2 \log R = \overline{14}{,}39224$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$	$\log \tan g \lambda = 0{,}05834$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$	$2 \log \sin V = \bar{1}{,}27936$
$\log$ 2tes Gl. $= 3{,}4178193$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31442$
2tes Gl. $= -2617'',09.$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
Dieſes Glied iſt negativ,	$\log$ 3tes Glied $= 0{,}64953$
weil hier cos V negativ iſt.	3tes Glied $= -4'',45.$

Es iſt alſo $\lambda' = \lambda - 2617'',09 - 4'',46 = 48°,\ 6',\ 31'',\ 45.$

2. Berechnung von $L' - L.$

$\log \sin V = \bar{1}{,}6396768$	$\log \sin V = \bar{1}{,}63968$
$-\log \cos \lambda = 0{,}1816393$	$-\log \cos \lambda = 0{,}18164$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log S = 4{,}9531022$	$\log \tan g \lambda = 0{,}05834$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$	$\log \cos V = \bar{1}{,}95417$
$\log$ 1tes Gl. $= 3{,}2849633$	$2 \log S = 9{,}90620$
1tes Gl. $= 1927'',36$	$-2 \log R = \overline{14}{,}39224$
	$\log$ 2tes Gl. $= \overline{1}{,}44670$
	2tes Gl. $= -27'',97.$

Alſo $L' - L = 1927'',36 - 27'',97 = 1899'',39 = 31',\ 39'',\ 39.$

3. Berechnung von $V'.$

$\log S = 4{,}9531022$	$2 \log S = 9{,}90620$	$2 \log S = 9{,}90620$
$\log \tan g \lambda = 0{,}0583417$	$\log \cos V = \bar{1}{,}95417$	$2 \log \tan g \lambda = 0{,}11668$
$\log \sin V = \bar{1}{,}6396768$	$\log \sin V = \bar{1}{,}63968$	$\log \sin V = \bar{1}{,}63968$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$	$-2 \log R = \overline{14}{,}39224$	$\log \cos V = \bar{1}{,}95417$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31442$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31442$
$\log$ 1tes Gl. $= 3{,}1616657$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	$-2 \log R = \overline{14}{,}39224$
1tes Gl. $= 1450'',99$	$\log$ 2tes Gl. $= \overline{0}{,}90569$	$\log$ 3tes Gl. $= 1{,}32339$
	2tes Gl. $= -8'',05$	3tes Gl. $= -21'',06.$

Alſo $V' = 154°,\ 32',\ 1'',\ 88.$

Digitized by Google

Um einen Begriff davon zu geben, wieviel die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ betragen können, wollen wir sie in dem gegenwärtigen Beispiel für λ' berechnen.

$3 \log S =$	14,859	$\log \text{Factor} =$	$\bar{2}$,694	1tes Gl. $= +$ 0″,016
$-3 \log R =$	$\bar{2}$1,588	$-\log 3 =$	$\bar{1}$,523	2tes Gl. $= +$ 0″,065
$\log \sin 2V =$	$\bar{1}$,895	$\log$ 1tes Gl. $=$	$\bar{2}$,217	Zusammen $=$ 0″,081.
$\log \sin V =$	$\bar{1}$,640	$\log$ Fact. $=$	$\bar{2}$,694	
$-\log 4 =$	$\bar{1}$,398	$2 \log \text{tang} \lambda =$	0,117	
$-\log \sin 1'' =$	5,314	$\log$ 2tes Gl. $=$	$\bar{2}$,811	
$\log \text{Factor} =$	$\bar{2}$,694			

Dieser Werth der Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ kann, obgleich er sehr klein ist, nicht vernachläßigt werden; aber in einem trigonometrischen Netze wird auch fast nie eine Seite 89764 Metres, welches an 20 Stunden Weges ist, lang seyn.

94) Die Formel aus (74) giebt, wenn man für b, a, C die Werthe aus (93) setzt, eine, wodurch man S findet, wenn λ, λ' und L′—L gegeben sind.

95) Die Aufgaben, welche in den vorhergehenden §§. aufgelöst sind, kann man als besondere Fälle folgender allgemeiner Aufgaben ansehen:

1. Wenn die Länge *) und Breite eines Punctes, wie auch der Azimuth einer geodätischen Linie, welche durch diesen Punct geht, gegeben sind; die Länge und Breite eines Punctes, welcher auf derselben geodätischen Linie liegt, und dessen Entfernung vom ersten Puncte bekannt ist, und den Azimuth der geodätischen Linie im zweiten Puncte zu finden.

2. Wenn die Breiten zweier Puncte und ihr Längenunterschied gegeben sind, die Entfernung der beiden Puncte und die Azimuthe der geodätischen Linie, welche sie verbindet, zu finden.

Die Auflösung dieser Aufgaben, wenn die Entfernung AB nicht im Vergleich gegen PA, PB Fig. XXII. sehr klein ist, besteht in der Auflösung ganz gewöhnlicher sphärischer Dreiecke, und hat daher gar keine Schwierigkeiten; nur muß man bemerken, daß die Entfernung der Puncte A, B in Graden bestimmt werden muß, welches geschieht, wenn man dieselbe mit $\frac{180}{\pi R}$ multiplicirt.

*) Wenn man von der Länge eines Punctes spricht, so versteht es sich von selbst, daß man eine geographische Länge meint.

Digitized by Google

96) In dieser Abtheilung wollen wir einen Begriff von dem Gange geben, welchen man befolgt hat, um den Radius der Erde zu bestimmen. Bestimmung des Radius der Erde.

Diese Aufgabe ist gelöst, wenn man den Bogen eines Erdmeridians von einer bekannten Anzahl Graden gemessen hat; denn wenn diese Anzahl n, und die Länge des Bogens l ist, so hat man $n : 180 = l : \pi R$, folglich $R = \frac{180 . l}{n \pi}$.

97) Um zu zeigen, wie man bei der Messung eines Meridianbogens verfährt, müssen wir einige Erklärungen und Sätze vorausschicken.

1. Wenn man in einem Puncte der Erde auf den Meridian desselben einen größten Kreis senkrecht zieht, so heißt dieser Kreis die Perpendiculäre des Punctes oder sein Perpendicular-Kreis.

2. Wenn Fig. XXIV. PA der Meridian von A und BI der Perpendicular-Kreis von I ist, so heißt BI die Entfernung des Punctes B von dem Meridiane von A, und AI die Entfernung des Punctes B von der Perpendiculäre von A.

3. Die Perpendiculäre und der Parallelkreis eines Punctes A, haben in A einerlei Tangente; und da die Krümmung beider Kreise in kleinen Theilen derselben nicht merklich ist (es sei denn die des Parallelkreises, wenn A nahe am Pole liegt), so folgt daraus, daß sie in einer kleinen Entfernung von A, ohne großen Irrthum verwechselt werden können.

4. Die Meridiane zweier nahe gelegenen Puncte, so wie auch ihre Perpendiculären können ohne großen Irrthum in einer kleinen Strecke ihrer Richtungen als parallele und gerade Linien angesehen werden.

5. Die Perpendiculären MI, ML Fig. XXIV. von Puncten L, I, welche auf dem nämlichen Meridiane liegen, begegnen sich in denselben Puncten M, M′ des Equators, so daß jeder der Bogen ML, MI, M′L, M′I, 90° beträgt.

98) Man kann durch astronomische Beobachtungen zwei Puncte finden, welche beinahe auf demselben Meridiane liegen, und ihre Breiten bestimmen. Diese Puncte seien A und R Fig. XXIII., wo AT den Meridian von A bedeutet.

Ist dieses geschehen, so bedecke man den Meridian AT mit einem Netze von Dreiecken, welches sich von A bis R erstreckt. Die Puncte dieses Netzes muß man so wählen, daß sie sich nie weit von AT entfernen.

Digitized by Google

Die Dreiecke löse man wie geradlinige auf, und vernachläßige dabei die Reduction der Basis auf die Meeresfläche, welche eine angenäherte Kenntniß des Erde-Radius erfordert.

Man fälle jetzt aus B, D, F, G,.....R, auf den Meridian AT, welchen man als eine gerade Linie ansieht, die Perpendikel BI, DL, FR,.....RT, und ziehe durch dieselben Puncte mit dem Meridiane die Parallellinien BU, DS, GN....., betrachte übrigens die ganze Figur als läge sie in einer Ebene. Dann sind: BU=IL, DS=LK u. s. w. Nun ist der Winkel BAT astronomisch bestimmt, und aus diesem lassen sich alle die Azimuthe DBU, FDS, FGN.... finden, weil die Winkel der Dreiecke bekannt sind; so z. B. ist: DBU=ABC+CBD—ABU, aber UBA=180°—Z; also DBU=ABC+CBD—180°+Z. Ebenso ist FDS=BDC+CDE+FDE—SDB und SDB=180°—DBU; auf die nämliche Art findet man die übrigen.

Man hat aber: AI=AB . cos Z, IL=BU=BD . cos DBU, LK=DS=FD cos FDS u. s. w.; addirt man alle diese Linien zusammen, so erhält man die Länge AT.

Da wir angenommen haben, daß R nahe bei AT liege, so kann man RT als ein Stück der Perpendiculäre und also auch des Parallelkreises von T ansehen; daher haben T und R einerlei Breite. Da nun die Anzahl Grade des Bogens AT offenbar dem Unterschiede der Breiten seiner Endpuncte gleich ist, so kennt man Alles, was nöthig ist, um den Radius dieses Bogens nach (96) zu bestimmen.

99) Der Werth, den man auf die vorige Art für den Radius der Erde findet, ist allerdings noch sehr unvollkommen; indessen kann er schon dienen, um die, in der eben angegebenen Operation vernachläßigten, Reductionen zu berechnen, und dann folgenden Gang zu beobachten.

a) Man berechne zuerst die Breiten der Puncte B, D, F, ihre Längenunterschiede und die Azimuthe der Seiten der Dreiecke, nach den in (93) gegebenen Formeln, wo man für R den (98) gefundenen Werth des Erde-Radius setzt.

b) Fig. XXIV. seien A, B, D die nämlichen Puncte wie in Fig. XXIII.; man ziehe DL, BI auf den Meridian AT senkrecht, und berechne die Stücke AI, LI..... des Meridians AT wie folgt. Da die beiden Perpendiculären ML, MI, welche durch D und B gehen, in denselben Puncten M, M' den Equator begegnen, und die Bogen MI, ML, M'I, M'L, 90° betragen, so sind M und M' die Pole des Kreises PAP'. Es hindert uns deswegen nichts, die Kreise MIM', MLM' als Meridiane und den Kreis

Digitized by Google

PAP' als den Equator zu betrachten; dann wäre BI die Breite von B, DL die von D und der Winkel DBM' der Azimuth von BD. Der Bogen LI ist das Maaß des Winkels DM'B, welcher in unserer Unterstellung der Längenunterschied der Puncte B und D wäre.

Nun setze man BI = y, DL = y', DB = S, DBM' = z, so sind diese Größen das, was λ, λ', S, V in (93) bedeuteten. Man hat also auch hier die Formeln:

$$y' = y + \frac{S \cos z}{R \sin 1''} - \frac{S^2}{R^2} \frac{\sin^2 z \tang y}{2 \sin 1''} \text{ und,}$$

$$LI = \frac{\sin z}{\sin 1'' \cos y} \left(\frac{S}{R} + \tang y \cos z \frac{S^2}{R^2} \right),$$ wo wir die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ weggelassen haben.

Mit diesen Formeln kann man, wenn y bekannt ist, y' und LI finden; nur fehlt noch die Bestimmung des Winkels DBM'. Aber DBP ist bekannt, denn er ist der wahre Azimuth V der Seite DB; nun ist DBM' = 180° — V — PBI; und in dem rechtwinkeligen Dreiecke PIB ist cos. PBI = tang y tang λ, wenn λ die Breite von B, welche 90° — PB ist, bedeutet.

Im Puncte A ist y = o, z = 90° — Azimuth von AB; folglich $y' = BI = \frac{S \cos z}{R \sin 1''}$, $AI = \frac{\sin z}{\sin 1''} \cdot \frac{S}{R}$. Mit Hülfe von BI berechnet man nun durch die obigen Formeln, in denen man, wenn es nöthig ist, die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ beibehält, die Größen DL, LI, und so fort bis zum Puncte T.

Die zweite Formel giebt LI in Secunden; da man aber diese Linie in Längenmaaß braucht, so muß man ihren Werth noch mit R sin 1" multipliciren; wenn demnach R in Metern gegeben ist, so erhält man LI in Metern durch die Formel:

$$LI = \frac{\sin z}{\cos y} \left(S + \tang y \cos z \frac{S^2}{R} \right)$$ *), welche im Puncte A, AI = S sin z wird.

---

*) Diese Formel kann ohne genaue Kenntniß von R angewendet werden, indem das erste Glied derselben, welches den größten Theil von LI ausmacht, von R ganz unabhängig ist, den kleinen Einfluß von R im Werthe von y und z ausgenommen.

Digitized by Google

Wenn man auf die vorige Art die Länge des Bogens AT gefunden hat, so muß man, um die Anzahl Grade desselben zu erhalten, nur noch die Breite von T kennen. Diese ist leicht aus dem Dreiecke PTR zu berechnen; denn man kennt in demselben PR = 90° — Breite von R, und RT.

Es ist also $\sin(\text{Breite von T}) = \frac{\sin(\text{Breite von R})}{\cos RT}$; RT ist sehr klein; nennt man daher die Breite von T = b', die Breite von R = b und RT = m in Längenmaaß, so ist $\sin b' = \frac{\sin b}{1 - \frac{m^2}{2R^2}} = \sin b \left(1 + \frac{m^2}{2R^2}\right)$. Nun sei $b' = b + \delta$; so ist

$\sin b' = \sin b + \delta \sin 1'' \cos b$; also $\delta \sin 1'' \cos b = \frac{m^2}{2R^2} \sin b$ und $\delta = \frac{m^2 \tang b}{2R^2 \sin 1''}$.

100) Der Werth des Bogens AT, den man nun gefunden hat, ist weit genauer als der vorige; man kann also aus demselben auf einen bessern Werth von R schließen; wiederholt man dann die Rechnung in (99) mit diesem neuen Werthe von R, so erhält man ein noch richtigeres AT, und daher auch ein vollkommneres R.

Durch solche wiederholte Annäherungen kann man dem wahren R so nahe kommen als man will.

Die Methode, welche wir eben auseinander gesetzt haben, um die Länge des Meridianbogens zu finden, ist nicht die einzige, die man anwenden kann. Mehrere solche Methoden, und eine vollständige Discussion derselben findet man in der Base du système metrique von Delambre, Vol. III.

Zweites Kapitel.

Von den geodätischen Operationen, in der Unterstellung, daß die Erde die Gestalt eines durch Umdrehung erzeugten Ellipsoid's habe.

Warum man diese Unterstellung mache, u. was d. Erklärungen des vierten K. Th. 1. in derselben werden.

101) Die Gesetze der Bewegung erfordern, daß die Erde in dem halbflüssigen Zustande, worin sie sich einst allem Anscheine nach befand, durch ihre tägliche Umdrehung eine Form angenommen habe, welche von der Kugelgestalt dahin abweicht, daß die Krümmung der Meridiane vom Equator bis zu den Polen immer etwas abnimmt, so daß die Erde an den Polen abgeplattet ist. Dieses Resultat der Theorie hat sich durch die Erfahrungen

Digitized by Google

vollkommen bestättigt, und in der Folge werden wir sehen, wie es sich aus den geodätischen Operationen selbst ergiebt.

Eine Kugel, die an zwei Endpuncten eines Durchmessers abgeplattet ist, hat mit einem Ellipsoide, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse erzeugt wird, viel Aehnliches; man hat deshalb den Erdball als ein solches Ellipsoid betrachtet, und die, aus dieser Unterstellung hergeleiteten Resultate haben sich mit der Erfahrung so übereinstimmend gefunden, daß man bis jetzt in allen genauern geodätischen Operationen die Erde als ein vollkommenes Ellipsoid betrachtet.

102) Aus den Definitionen des Kap. 4, Th. 1. geht in unserer Hypothese Folgendes hervor:

1. Die Mitte der Erdachse ist das Centrum des Ellipsoid's.

2 Im Allgemeinen liegen die Verticalen zweier Puncte nicht in der nämlichen Ebene, und begegnen sich also nicht; sie thun es, wenn die beiden Puncte auf dem nämlichen Meridiane oder Parallelkreise liegen, wie aus dem, was sogleich folgt, erhellt.

Alle Verticalen schneiden die Erdachse, und diejenigen, welche Puncten zugehören, die auf dem nämlichen Parallelkreise liegen, begegnen sich im nämlichen Puncte der Erdachse.

3. Der Erde-Equator ist ein Kreis und seine Ebene ist mit der des Himmels-Equators einerlei.

4. Die Erdparallelkreise sind wirkliche Kreise, und ihre Ebenen stehen auf der Erdachse senkrecht.

5. Die Erdmeridiane sind alle mit der Ellipse einerlei, welche die Erdfläche erzeugte.

6. Die Breite eines Punctes ist nicht mehr dem Bogen des Meridians, welcher zwischen dem Puncte und dem Equator liegt, sondern dem Winkel, den die Verticale des Punctes mit der Ebene des Equators macht, gleich.

7. Die Länge eines Punctes von einem andern her, ist dem Winkel ihrer Erdmeridiane gleich.

8. Was die geodätische Linie auf einem Ellipsoide sei, wird aus Folgendem hervorgehen.

Digitized by Google

Fig. XXV. sei AB der Durchschnitt zweier Ebenen, C ein Punct in der einen, D in der anderen; COD stellt einen Faden vor, welcher genöthigt ist durch die Puncte C und D zu gehen, in C befestigt ist, und in der Richtung OD mit irgend einer Kraft gezogen wird; man fragt, welche Lage der Faden haben müsse, damit er ruhe?

Man denke sich, der Faden werde in C von einer Kraft gezogen, welche den Widerstand des festen Punctes ausdrückt, und wende diese Kraft sowohl, als die Kraft in D, in dem Puncte O an; dann werden die beiden Kräfte sich in eine OS zusammensetzen lassen, welche in der Ebene COD liegt; ist nun OS auf AB nicht senkrecht, so kann man sie in zwei Kräfte zerlegen, deren eine OK auf AB senkrecht steht, die andere aber auf AB in OL liegt; die senkrechte wird, da wir AB als unbeweglich annehmen, zerstört, und die OL wird den Punct O über AB fortbewegen. Hieraus geht hervor, daß der Faden nicht eher ruhen könne, bis OS auf AB senkrecht ist.

Gesetzt nun CO und OD seien zwei auf einander folgende Elemente einer krummen Linie, welche auf einer convexen krummen Fläche gezeichnet ist; so kann man auf dem nämlichen Wege wie vorhin leicht finden, daß OS eine Normale, folglich COD eine Normalebene seyn müsse, damit der Faden ruhen könne.

Wenn also über eine convexe Fläche zwischen zwei Puncten A und B ein Faden so gespannt ist, daß er in A befestigt, und in B gezogen wird, so müssen, wenn er ruhen soll, immer zwei auf einander folgende Elemente der krummen Linie, welche der Faden bildet, in einer Normalebene liegen. Da nun ein Faden, wenn er der kürzeste ist, den man von A nach B spannen kann, nothwendig ruhen muß, so folgt daraus, daß von der kürzesten Linie, welche man über eine convexe Fläche ziehen kann, immer zwei auf einander folgende Elemente in einer Normalebene liegen.

Weil aber zwei Normalen des Ellipsoids im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, so ist die kürzeste Linie auf demselben eine Linie von doppelter Krümmung. Um uns von ihren Eigenschaften einen deutlichen Begriff zu machen, sei das Folgende:

Fig. XXVI. ist ND die Erdachse, N der Pol, NA und NB die Meridiane von A und B; AD ist die Verticale von A, BC die von B; man ziehe BD und AC, so werden die Ebenen ACB, ADB die krumme Fläche in AS'B und ASB schneiden. Nun können drei Fälle Statt haben.

Digitized by Google

a) Entweder ſind A und B ſo gelegen, daß keine von den Linien ASB, AS'B einen der Parallelkreiſe von A oder B außerhalb A oder B ſchneidet, (Fig. XXVI.) oder

b) A und B liegen auf dem nämlichen Parallelkreiſe, in welchem Falle die Linien ASB, AS'B nothwendig eine und dieſelbe ſind, wie Fig. XXVI. bis a), oder

c) die Linie ASB ſchneidet den Parallelkreis von A noch außerhalb A, oder AS'B ſchneidet den Parallelkreis von B noch außerhalb B *).

Erſter Fall. Fig. XXVI. Wäre die Erde eine Kugel, ſo würden ASB und AS'B einerlei ſeyn, und ASB wäre die geodätiſche Linie von A nach B. Im gegenwärtigen Falle wird dieſe Linie weder von ASB, noch von AS'B, viel verſchieden ſeyn, weil das Ellipſoid einer Kugel ſehr nahe kömmt. Indeſſen iſt die geodätiſche Linie weder ASB noch AS'B, ſondern ſie geht zwiſchen beiden durch, wie wir jetzt beweiſen wollen.

Wenn man in einem Puncte S der Linie ASB eine Normale ES auf die Erdfläche zieht, ſo wird E zwiſchen C und D liegen. Stellt man ſich nun wieder ASB als einen Faden unter den nämlichen Umſtänden wie früher vor, ſo werden die Kräfte, welche im Puncte S gegen A und B hin, in der Richtung der Elemente, die in S zuſammenſtoßen, wirken, in eine SF, welche in der Ebene ASBD liegt, zuſammengeſetzt werden können. Nun wird die verlängerte Ebene EFS, eine andere, welche in S das Ellipſoid berührt, in HG ſchneiden, und SF wird in dem Winkel ESG liegen. Die Kraft SF kann alſo in zwei zerlegt werden, deren eine längſt SE und die andere längſt SG wirkt; da nun die erſte zerſtört wird, ſo muß ſich der Faden aus der Stellung ASB gegen AS'B bewegen. Ebenſo läßt ſich aber auch beweiſen, daß der Faden von AS'B gegen ASB rücken würde; er kann alſo im Zuſtande der Ruhe, nicht anders, als zwiſchen ASB und AS'B liegen, welches unſern Satz beweißt.

Zweiter Fall. Fig. XXVI. bis a).

AM, BM ſeien die Normalen der Puncte A und B, und ASB der Durchſchnitt des Ellipſoids mit der Ebene AMB. Da alle Puncte der Linie ASB näher beim Pole liegen werden als A und B, ſo muß jede Normale SN, welche in irgend einem jener Puncte

*) Es iſt nicht möglich, daß ASB den Parallelkreis von B ſchneide, wenn AS'B nicht daſſelbe thut, und eben ſo wenig kann AS'B den Parallelen von A ſchneiden, ohne daß ASB dieſem Kreis begegnet. Die obigen Fälle ſind alſo die einzigen, welche Statt haben können.

Digitized by Google

gezogen ist, die Achse unter M schneiden; und es läßt sich leicht nach der Methode des vorigen Falles zeigen, daß ein Faden ASB, um eine ruhende Stellung anzunehmen, aus der Lage ASB sich nach dem Pole P hin bewegen werde.

Denken wir einen Meridian PS, welcher genau in der Mitte zwischen PA und PB durchgeht, so wird dieser die Ebene AMB in einer Linie SM schneiden, und diese Linie wird von jeder Normale, welche in einem Puncte von SP, zwischen S und P, gezogen werden kann, begegnet.

Nun denke man sich von A nach B die Sehne AIB, welche von der Ebene PMS in I halbirt wird; so muß es nach dem Vorigen eine Normale TIK geben, welche die Ellipse PS oberhalb S in T begegnet; man lege durch KT und A, B eine Ebene, deren Durchschnitt mit dem Ellipsoide durch ATB bezeichnet sei. Beobachtet man dann, daß alle Puncte von ATB eine geringere Breite als T haben, so wird man daraus leicht herleiten können, daß ein Faden ATB aus der Stellung ATB nach unten hin fortrücken müsse, ehe er in Ruhe kommen könne. Man weiß also gewiß, daß die geodätische Linie zwischen ASB und ATB liegt.

Fig. XXVI. bis b) ist zur größern Deutlichkeit dasjenige gezeichnet, was in der Ebene PMS vorgeht.

Dritter Fall. Fig. XXVI. (ter).

Wenn die Ebene, welche durch die Normale BM und den Punct A geht, das Ellipsoid in einer Linie ASB schneidet, die dem Parallelkreis von B in S begegnet, so werden alle Normalen des Theiles SA die Achse über M, und jene des Theiles SB dieselbe unter M schneiden. Stellt man sich daher unter ASB einen in A und B gezogenen Faden vor, so wird SB sich gegen den Pol, und SA vom Pole ab bewegen, so, daß der Punct S der nämliche bleibt. In diesem Falle muß also die geodätische Linie den Parallelkreis von B in S schneiden. Man darf also hier die geodätische Linien als aus zwei Theilen AS und SB bestehend, ansehen, so, daß die Lage des ersten Theiles nach dem ersten Falle, und die des zweiten Theiles nach dem zweiten näher bestimmt werden kann.

Bestimmung der Achsen d. Erde-Ellipsoid's durch geodätische Operationen

103) Fig. XXVII. sei PO ein Quadrant des Meridians, P der Pol; AB und A′B′ seien zwei Meridianbogen. Wenn AC, BC, A′D, B′D Normalen sind, so sind die Winkel ACB, A′DB′ die Breitenunterschiede der Puncte A, B und A′, B′.

Digitized by Google

Dieſe Breitenunterſchiede würden in der Unterſtellung, daß die Erde eine Kugel, und folglich der Meridian ein Kreis wäre, mit den Längen der Bogen AB und A′B′ in Proportion ſtehen; iſt aber der Meridian eine Ellipſe, ſo muß nothwendig, bei gleichen Längen der Bogen AB und A′B′, der Winkel $ACB > A'DB'$ ſeyn; es gehören alſo zu gleichen Meridianbogen nicht mehr gleiche Breitenunterſchiede, oder die Meridianbogen ſind mit den Breitenunterſchieden ihrer Endpuncte nicht mehr in Proportion, und zwar ſo, daß der Bogen, welcher näher beim Pole liegt, größer iſt, als er es vermöge des Breitenunterſchiedes ſeiner Endpuncte ſeyn ſollte; das heißt: $AB : \overset{\frown}{A'B'} - n = ACB : A'DB'$:

Wenn man alſo die Breiten von A, B, A′, B′ aſtronomiſch beobachtet, welches ohne genaue Kenntniß von der Geſtalt der Erde geſchehen kann, und dann die Bogen AB und A′B′ mißt, ſo wird man dieſe nicht mit den Breitenunterſchieden ihrer Endpuncte in Proportion finden. Hingegen werden dieſe Bogen gewiſſe Functionen der Breiten ihrer Endpuncte und der Achſen des Meridians ſeyn. Die Kenntniß der Länge eines ſolchen Bogens kann alſo eine Gleichung zwiſchen bekannten Größen und den Achſen geben; mithin iſt die Meſſung zweier Meridianbogen hinreichend, um die Achſen der Ellipſe zu beſtimmen, welche durch ihre Umdrehung den Erdball erzeugte.

Aber die Methoden, welche wir auseinander geſetzt haben, um die Meridianbogen zu meſſen, ſcheinen zu unterſtellen, daß die Erde ſphäriſch ſei; wenn dieſes wirklich wäre, ſo würde man offenbar in den Werthen der Bogen denjenigen Unterſchied nicht finden, welchen die elliptiſche Form der Erde hervorbringt, (da man dieſe bei der Meſſung gar nicht beachten würde), und dieſer Unterſchied iſt gerade dasjenige, wodurch von der Länge der Meridianbogen auf die der Achſen geſchloſſen werden kann.

Allein unſere früheren Methoden unterſtellen nur, daß man annehmen könne, derjenige Theil der Erdfläche, worauf ſich der zu meſſende Meridianbogen und das dazu nöthige trigonometriſche Netz befindet, ſei ein Theil irgend einer Kugelfläche. Auf dieſe Art kömmt alſo bei der Anwendung unſerer Methoden alles in Anſchlag, was die Abweichung der Erde von der Kugelgeſtalt beim Uebergange von einem Bogen zum anderen hervorbringt, und nur das Wenige, was dieſe Abweichung während des Laufes eines einzigen Meridianbogens *) bewirken kann, wird vernachläßigt.

---

*) Dieſes unterſtellt, wie es auch wirklich immer iſt, daß die Meridianbogen, welche man mißt, klein ſind.

Digitized by Google

Die Messung der Bogen, welche nach (97) ꝛc. geschehen ist, kann also, wiewohl nicht zu einer genauen, jedoch zu einer angenäherten Bestimmung der Achsen des Erde-Ellipsoid's dienen.

104) In Folgendem nehmen wir uns nun vor zu zeigen, wie man aus zwei Meridianbogen und den Breiten ihrer Endpuncte auf die Längen der Erdachsen schließen könne.

Fig. XXVIII. sei RPMQ ein Meridian, RQ seine große Achse, PA die halbe kleine; MN sei eine Normale, also MIK die Breite von M.

Es heiße $AQ=a$, $PA=b$, $MK=y$, $AK=x$, $MQ=S$, $MIQ=\lambda$; so ist nach bekannten Eigenschaften der Ellipse: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $\tang\lambda=\frac{a^2y}{b^2x}$. Also

$$ay=\frac{b^2x\tang\lambda}{a}=\frac{b^2x\sin\lambda}{a\cos\lambda}, \text{ mithin } \frac{b^4x^2\sin^2\lambda}{a^2\cos^2\lambda}+b^2x^2=a^2b^2 \text{ oder}$$

$$b^2x^2\sin^2\lambda+a^2x^2\cos^2\lambda=a^4\cos^2\lambda, \text{ folglich } x^2=\frac{a^4\cos^2\lambda}{b^2\sin^2\lambda+a^2\cos^2\lambda}=$$

$$=\frac{a^4\cos^2\lambda}{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\lambda}=\frac{a^2\cos^2\lambda}{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\sin^2\lambda}.$$

Die Größe $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, welche man die Excentricität der Ellipse nennt, heiße e, so ist $x=\frac{a\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}$ und $y=\frac{b^2}{a^2}x\tang\lambda=\frac{\frac{b^2}{a}\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}$; nun ist aber

$$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2, \text{ also } y=\frac{a(1-e^2)\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}.$$

Das Differential des Bogens S, nämlich dS, ist gleich $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Wenn man aus den vorigen Werthen von x und y die dx und dy sucht, so findet man leicht:

$$dS=\frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diesen Werth von dS wollen wir eine Reihe entwickeln, welche nach e geordnet ist, und wo keine Potenzen von e über die 4te beibehalten werden, da e eine kleine Zahl ist.

Man hat $dS=d\lambda.a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}=d\lambda.a(1-e^2)(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\lambda+\frac{15}{8}e^4\sin^4\lambda)$; aber $\sin^2\lambda=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\lambda$, $\sin^4\lambda=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\lambda+\frac{1}{8}\cos 4\lambda$ nach (3); diese Formeln und die Multiplication mit $1-e^2$ geben:

Digitized by Google

$dS = d\lambda . a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4\right)\cos 2\lambda + \frac{15}{64}e^4 \cos 4\lambda\right)$; ſetzt man

$1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 = A$; $\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{16}e^4 = B$; $\frac{15}{64}e^4 = C$, ſo wird

$dS = a(A . d\lambda - B . \cos 2\lambda . d\lambda + C . \cos 4\lambda . d\lambda)$, woher man leicht durch Integriren,

$S = a\left(A\lambda - \frac{B}{2}\sin 2\lambda + \frac{C}{4}\sin 4\lambda\right) + \text{const.}$ erhält.

Für eine andere Art Breite λ' iſt $S' = a\left(A\lambda' - \frac{B}{2}\sin 2\lambda' + \frac{C}{4}\sin 4\lambda'\right) + \text{cons.}$;

mithin: $S - S' = a A(\lambda - \lambda') - \frac{B}{2}(\sin 2\lambda - \sin 2\lambda') + \frac{C}{4}(\sin 4\lambda - \sin 4\lambda')$. Dieſes iſt die Länge des Meridianbogens, welcher die Breiten λ und λ' an ſeinen Endpuncten hat. Beobachtet man, daß alles, womit a multiplicirt iſt, eine abſtracte Zahl ſeyn muß, ſo muß man noch $\lambda - \lambda'$ in Theilen des Radius ausdrücken; nimmt man zu dem noch die Formeln in (2), ſo wird

$S - S' = a\left(A(\lambda - \lambda')\sin 1'' - B\cos(\lambda' + \lambda)\sin(\lambda - \lambda') + \frac{C}{2}\cos 2(\lambda' + \lambda) \times \sin 2(\lambda - \lambda')\right.$)

Wenn man die Größen, womit hier A, B, C, multiplicirt ſind, berechnet hat, ſo wird man leicht eine Gleichung von folgender Form bilden: $M = a(\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4)$ und ebenſo für einen zweiten Bogen: $M' = a(\alpha' + \beta' e^2 + \gamma' e^4)$. Durch die Elimination von a bekömmt man $p + q e^2 + r e^4 = o$.

Aus dieſer Gleichung findet man e^2, wenn man die Glieder mit e^6 und die höheren vernachläßigt, auf folgende Art: es iſt $e^2(q + r e^2) = -p$, und $e^2 = \frac{-p}{q} - \frac{r e^4}{q}$;

alſo $e^2\left(q - \frac{rp}{q}\right) = -p$, $e^2 = \frac{-pq}{q^2 - rp}$.

Iſt e^2 bekannt, ſo hat man $a = \frac{M}{\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4}$, woraus

$$\log a = \log M - \log(\alpha + \beta e^2 + \gamma e^4) = \log M - \log\alpha - \log\left(1 + \frac{\beta e^2}{\alpha} + \frac{\gamma e^4}{\alpha}\right) =$$

$$= \log M - \log\alpha + k\left(-\frac{\beta}{\alpha}e^2 - \frac{\gamma}{\alpha}e^4 + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}e^4\right)$$

wo $k = 0{,}4342945$ iſt.

Die halbe kleine Achſe $b = a\sqrt{1 - e^2}$, woher

$$\log b = \log a + \tfrac{1}{2}\log(1 - e^2) = \log a - \frac{k}{2}\left(e^2 - \frac{e^4}{2}\right).$$

Digitized by Google

Wären die Messungen der Meridianbogen ganz genau, so fände man auf die vorige Art:

$$a = 6376984 \text{ Met.} \quad b = 6356324 \text{ Met.} \quad e^2 = 0{,}0064691.$$

Die Größe $\frac{a-b}{a}$ heißt die Abplattung der Erde und ist gleich 0,00323977 oder $\frac{1}{308{,}65}$. Der Meter ist der 10000000ste Theil des elliptischen Meridian-Quadranten und beträgt $0{,}5130740 \frac{\text{Toisen}}{}$. Diese Werthe sind aus zwei Meridianbogen, deren einer in Frankreich, und der andere in Peru gemessen wurde, hergeleitet *).

Da nun das Verfahren in (104) unterstellt, daß die Messung der Meridianbogen ohne Kenntniß der elliptischen Form der Erde geschehen sei, so wird man für a, b, e nicht genau die vorigen Werthe finden; aber diejenigen, welche man erhält, können vollkommen dienen, um nach den Formeln, die wir sogleich geben werden, die Excentricität der Erde bei der Messung der Meridianbogen in Anschlag zu bringen. Mit den so verbesserten Bogen, kann man dann die obigen Werthe von a, b, e berechnen.

Formeln, wodurch man bei d. Messen eines Meridianbogens die Excentricität der Erde in Betracht zieht.

105) In dieser Abtheilung wollen wir zuerst die Werthe aller Linien im Ellipsoide angeben, welche man in den geodätischen Operationen braucht; dann werden wir suchen, zur Berechnung des Meridianbogens, genauere Formeln als die des vorigen Kapitels, und zugleich eine Abschätzung des Irrthums, welchen man daselbst begieng, zu geben.

Fig. XXIX. sei EC die halbe große und PC die halbe kleine Achse eines Meridians, so daß P der Pol ist; AM sei eine Normale, also die Verticale von A; AT eine Tangente: dann ist ALE der Winkel, den AL mit der Ebene des Equators macht, oder die Breite von A.

Nun sei $CE = a$, $CP = b$, $ALE = \lambda$, $AF = y$, $CF = x$, so ist nach (104):

$$x = \frac{a \cos\lambda}{(1 - e^2 \sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}, \quad y = \frac{a(1-e^2)\sin\lambda}{(1 - e^2 \sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$ und wenn AA′ ein Element des Meridians

---

*) Man könnte hier wissen wollen, wie der Quadrant des Meridianes, und hieraus der Meter bestimmt worden ist. Dieses geschah wie folgt:

Man fand zuerst nach dem Verfahren von (104) die Größen a, b in Toisen, und die Zahl e^2. Nahm man nun die Formel:

$$S - S' = a\left(A(\lambda - \lambda') \sin 1'' - B \cos(\lambda + \lambda') \sin(\lambda - \lambda') + \frac{C}{2} \cos 2(\lambda' + \lambda) \sin(\lambda - \lambda')\right)$$

und bedachte, daß die Breiten der Endpunete eines Quadranten 0 und 90° sind, so fand man den Quadranten $Q = a\,A \cdot 90 \cdot 3600 \sin 1''$ oder Meter $= \frac{a \cdot A \cdot 324 \cdot \sin 1''}{10000}$, welches eine bekannte Größe ist, da a und A gefunden sind.

Digitized by Google

bedeutet, so ist $AA' = dS = \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$. Nun sind $FT = y\tang\lambda$, $AT = y\sec\lambda$ $AL = y\operatorname{cosec}\lambda$, $LF = y\cot\lambda$, $AM = x\sec\lambda$, $At = x\operatorname{cosec}\lambda$. Setzt man für x, y ihre Werthe, so wird: $FT = \frac{a(1-e^2)\sin\lambda\tang\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$, $AT = \frac{a(1-e^2)\tang\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$,

$$AL = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},\quad LF = \frac{a(1-e^2)\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},\quad AM = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

$$At = \frac{a\cot\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn A'O auch eine Normale ist, so ist $A'OA = d\lambda$ und AO der Krümmungshalbmesser des Meridians im Puncte A. Nun ist $AA' = AO \times d\lambda$ oder $dS = AO \times d\lambda$, also $AO = \gamma = \frac{dS}{d\lambda} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$, wo der Krümmungshalbmesser γ genannt wird.

Wenn im Puncte A eine geodätische Linie auf dem Meridiane AP senkrecht steht, so heißt sie die Perpendiculäre von A; ihr erstes Element muß in der Ebene liegen, welche durch AM geht und auf der Ebene PAE senkrecht ist. Die Perpendiculäre hat nun offenbar dieses Element mit dem Parallelkreise von A gemein, indem die beiden Linien in A einerlei Tangente haben. Wenn man daher an den Endpuncten des gemeinschaftlichen Elementes auf das Ellipsoid Normalen zieht, so begegnen sich diese in M, weil sie von Puncten des nämlichen Parallelkreises ausgehen (102). Aber die beiden Normalen, von denen wir hier sprechen, sind offenbar auch Normalen auf die Perpendiculäre, und da sie an den Endpuncten eines Elementes gezogen sind, so ist der Punct, wo sie zusammenstoßen, das Centrum des Krümmungskreises der Perpendiculäre von A, für den Punct A. Wir schließen also daraus, daß die Linie AM der Krümmungshalbmesser der Perpendiculäre von A im Puncte A ist.

106) Wenn man über EI einen Halbkreis beschreibt, und FA bis in a verlängert, so ist, wie bekannt: $\frac{Fa}{FA} = \frac{a}{b}$. Nennt man nun den Winkel $aCE = \psi$, so ist $\frac{Fa}{FA} = \frac{\tang(90°-\psi)}{\tang(90°-\lambda)} = \frac{\tang\lambda}{\tang\psi} = \frac{a}{b}$; also ist $\tang\lambda = \frac{a}{b}\tang\psi$, und $\tang\psi = \frac{b}{a}\tang\lambda$. Es sei $\frac{b}{a} = m$. Dann ist: $\tang(\lambda-\psi) = \frac{\tang\lambda - \tang\psi}{1+\tang\lambda\tang\psi} = \frac{\tang\lambda(1-m)}{1+m\tang^2\lambda} =$

Digitized by Google

$$= \frac{\sin 2\lambda \frac{(1-m)}{2}}{\cos^2\lambda + m\sin^2\lambda} = \frac{\frac{1-m}{2}\sin 2\lambda}{\frac{m+1}{2} - \frac{m-1}{2}\cos 2\lambda} = \frac{\frac{1-m}{1+m}\cdot\sin 2\lambda}{1 + \frac{1-m}{1+m}\cos 2\lambda}$$; nennen wir

$\frac{1-m}{1+m} = -k$, so ist dieser Bruch $= \frac{-k\sin 2\lambda}{1-k\cos 2\lambda}$; aber nach (43) ist

$\frac{k\sin 2\lambda}{1-k\cos 2\lambda} = k\sin 2\lambda + \frac{k^2}{2}\sin 4\lambda + \ldots$. also $\frac{-k\sin 2\lambda}{1-k\cos 2\lambda} = -k\sin 2\lambda - \frac{k^2}{2}\sin 4\lambda - \ldots$;

setzt man für k seinen Werth $-\frac{1-m}{1+m}$, so ist:

$$\tang(\lambda-\psi) = \frac{1-m}{1+m}\sin 2\lambda - \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \frac{\sin 4\lambda}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

Nun ist $\frac{1-m}{1+m} = \frac{a-b}{a+b}$, folglich von der Ordnung e^2; also auch $\tang(\lambda-\psi)$ von der Ordnung e^2; mithin, bis auf Glieder mit e^6, $(\lambda-\psi)\sin 1'' = \tang(\lambda-\psi)$, da $(\lambda-\psi)\sin 1'' = \tang(\lambda-\psi) + \frac{\tang^3(\lambda-\psi)}{3}$ ..... ist. Man hat also, wenn die Glieder von der Ordnung e^6 weggelassen werden,

$$(\lambda-\psi) = \frac{1-m}{1+m}\cdot\frac{\sin 2\lambda}{\sin 1''} - \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2}\cdot\frac{\sin 4\lambda}{2\cdot\sin 1''}.$$

107). Wir wollen nun untersuchen, wie man die Breiten- und Längen-Unterschiede der Puncte eines Netzes und die Azimuthe der Seiten desselben, mit Rücksicht auf die elliptische Gestalt der Erde, berechnet.

Es seien Fig. XXX. A, A' die Endpuncte einer Seite des trigonometrischen Netzes. MA und M'A' sind die Verticalen der Puncte A, A' und PA, PA' ihre Meridiane. Die Linie $A\alpha A'$ bedeutet den Durchschnitt des Ellipsoids durch die Ebene MAA' und ist also von der wahren geodätischen Linie verschieden, denn diese liegt zwischen $A\alpha A'$ und dem Durchschnitte der Ebene M'AA' mit dem Ellipsoide, welcher hier durch $A\beta A'$ bezeichnet ist *).

Unsere Aufgabe ist: wenn die Länge der geodätischen Linie, ihr Winkel mit dem Meridiane AP und die Breite von A gegeben sind; die Breite von

*) Was wir hier sagen, bezieht sich in seiner ganzen Ausdehnung auf den Fall (102) 8), welchen die Fig. XXX. darstellt.

Digitized by Google

A′, den Winkel der geodätiſchen Linie mit PA′ und den Längenunterſchied der Puncte A und A′ zu finden.

Die Länge der geodätiſchen Linie ſei S, die Breite von A, λ, und der nördliche Azimuth der geodätiſchen Linie in A ſei V. Die Breite von A′ ſei L′; der nördliche Azimuth der geodätiſchen Linie in A′ heiße V′ und der Winkel APA′ ſei P.

Man beſchreibe aus M als Centrum mit dem Radius MA eine Kugelfläche, ſo entſteht durch die drei Ebenen PAM, PA′M, AMA′ ein ſphäriſches Dreieck P′AK, welches mit PAA′ einerlei wäre, wenn die Erde die Geſtalt einer Kugel hätte.

Es ſeien nun AK=S′, 90°—P′K=λ′, AP′K=P′, P′AK=v und 180°—P′KA=v′; ſo iſt P′=P und die Größen S′, λ′, v, v′ ſind von denen S, L′, V, V′ nur wenig verſchieden.

Wir wollen uns nun damit beſchäftigen, die Differenzen S—S′, L′—λ′, v—V, v′—V′ zu berechnen.

108) L′—λ′ zu finden. Man hat P′K=PMA′=90°—λ′ und PM′A′=90°—L′; alſo L′—λ′=PMA′—PM′A′=MA′M′. Wir müſſen daher hier den Winkel M′A′M finden.

Es ſei L′—λ=Δλ, λ′—λ=Δ′λ, MA′M′=I; Δλ iſt klein, weil man annimmt, daß AA′ eine kleine Linie ſei. Man kann unterſtellen, daß Δλ von der Ordnung e² ſei; denn e² iſt 0,0065; ſoll alſo Δλ gleich e² ſein, ſo muß es 0,0065 Theile des Radius, oder $\frac{0{,}0065}{\sin 1''}$ Secunden enthalten, woher Δλ=22′. Damit dieſes ſeyn könne muß AA′ wenigſtens 9 Stunden Länge haben, welches höchſt ſelten Statt findet.

Um nun I zu finden, berechnen wir zuerſt den Werth von CM Fig. XXIX;

$$CM = KM - y = AM \sin\lambda - y = \frac{a \sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a(1-e^2)\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}, \text{ alſo}$$

$$CM = \frac{a e^2 \sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = a e^2 \sin\lambda.$$ Hier laſſen wir die Glieder mit e⁴ weg, weil ſie nachher noch mit Δλ multiplicirt würden; wir betrachten nämlich e² als die erſte Ordnung, und werden Alles, was über die zweite ſteigt, in der gegenwärtigen Rechnung vernachläßigen, wovon man ſpäter die Urſache ſehen wird. Da nun

Digitized by Google

$CM = ae^2 \sin\lambda$, und ebenso in Fig. XXX.

$CM' = ae^2 \sin L'$ ist, so wird:

$$MM' = ae^2(\sin L' - \sin\lambda) = 2ae^2 \sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cos\left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$ seyn.

Beobachtet man, daß die Glieder mit $e^2\Delta\lambda^2$ schon weggelassen werden, so wird es klar, daß $MM' = ae^2\Delta\lambda\cos\lambda$ ist.

Nun ist $\frac{\sin MA'M'}{\sin A'MP} = \frac{MM'}{M'A'}$; $A'MP = 90° - L' + I = 90° - (L' - I)$, also $\frac{\sin I}{\cos(L' - I)} = \frac{MM'}{M'A'}$. Da I von der zweiten Ordnung seyn wird, so ist $\frac{\sin I}{\cos(L' - I)} = \frac{I}{\cos L'}$, folglich $I = \left(\frac{MM'}{M'A'}\right)\cos L'$; weil ferner L' und λ nur durch Glieder erster Ordnung verschieden sind, so ist auch $I = \frac{MM'}{M'A'}\cos\lambda$.

Aber $\frac{1}{M'A'} = \frac{1}{a}(1 - e^2\sin^2 L')^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 L' \ldots\ldots)$, also $\frac{MM'}{M'A'} = e^2 . \Delta\lambda . \cos\lambda$ und daher $I = L' - \lambda' = e^2\Delta\lambda\cos^2\lambda$. Da nun $\Delta\lambda - \Delta'\lambda = L' - \lambda'$ ist, so sind $\Delta\lambda$ und $\Delta'\lambda$ nur durch Glieder 2ter Ordnung verschieden, weshalb man auch $I = e^2\Delta'\lambda\cos^2\lambda$ nehmen kann.

109) $S' - S$ zu berechnen.

Den Unterschied der Längen S' und S betrachten wir als aus zwei Theilen bestehend; erstens ist S' von dem elliptischen, aber ebenen Bogen $A'\alpha A$ verschieden, und dieser ist wegen der doppelten Krümmung der geodätischen Linie mit S nicht einerlei. Wir wollen zuerst die doppelte Krümmung der geodätischen Linie zu schätzen suchen. Hier müssen die drei Fälle aus (102) 8) beachtet werden.

Im ersten Falle sei AaA' Fig. XXX. bis eine gerade Linie, und man beschreibe aus A' mit einem willkührlichen Radius eine Kugelfläche, so entsteht das sphärische Dreieck mna, in welchem $mn = I$, man der Winkel der Ebenen $MA'A$ und $M'A'A$, und $amn = \nu'$ ist.

Wenn man in A' an $A\beta A'$ eine Tangente zieht, so ist $M'A'$ auf derselben senkrecht, mithin der Winkel $M'A'A$ gleich 90° weniger den Winkel der Sehne AA' mit der Tangente;

Digitized by Google

dieſer aber iſt ſehr nahe $\frac{1}{2}$ AβA′; folglich, wenn man AβA′, in Theilen des Radius ausgedrückt, δ nennt, $n\,a = 90° - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\sin 1''}$.

Nun iſt $\sin man : \sin I = \sin v' : \cos\frac{\delta}{2\sin 1''}$, und wenn wir nur die Glieder von der niedrigſten Ordnung beibehalten, $man : I = \sin v' : 1$, alſo $man = I \sin v'$, woraus hervorgeht, daß dieſer Winkel von der zweiten Ordnung iſt. Zwiſchen AαA′ und AβA′ Fig. XXX. liegt die geodätiſche Linie; die zweite Krümmung derſelben iſt alſo höchſtens dem größten Abſtande dieſer Bogen gleich, und den größten Abſtand haben die Bogen ohngefähr in der Mitte.

Fig. XXXI. ſeien AqA′, ApA′ dieſe Bogen, aq und ap ſtehen in der Mitte von AA′ auf AA′ ſenkrecht, ſo iſt paq = man aus Fig. XXX. bis; pa kann man gleich qa ſetzen, und dann iſt der Bogen pq die zweite Krümmung der geodätiſchen Linie.

Aber $ap = AM(1 - \cos\frac{1}{2}ApA')$, weil AM der Radius von ApA′ iſt, alſo $ap = AM\left(1 - \cos\frac{1}{2}\frac{\delta}{\sin 1''}\right) = AM\left(1 - 1 + \frac{\delta^2}{2.4}\right) = AM \cdot \frac{\delta^2}{2.4}$. Nun iſt der Bogen $pq = pa \times paq = AM \cdot \frac{\delta^2}{2\cdot 4} \cdot I \cdot \sin v'$, folglich pq eine Größe von der 4ten Ordnung, und daher der Unterſchied der geodätiſchen Linie von A′αA gewiß von keiner niedrigern.

Im zweiten Falle aus (102) 8. iſt ST Fig. XXVI. bis b) dasjenige, was ſo eben der Bogen pq Fig. XXXI. war. Um dieſe Größe zu berechnen, wollen wir aus M (Fig. XXVI. bis a) eine Kugelfläche beſchreiben, welche mit den drei Ebenen PMA, PMS und AMS, ein ſphäriſches und in β rechtwinkeliges Dreieck αβγ bildet. Der Winkel AMB iſt hier δ, und folglich AMS oder $\beta\gamma = \frac{1}{2}\delta$; $\alpha\gamma = 90° - \lambda$. Es iſt daher $\sin\lambda = \cos\frac{1}{2}\delta \times \cos\alpha\beta$, woraus $\cos\alpha\beta = \frac{\sin\lambda}{\cos\frac{1}{2}\delta} = \sin\lambda\left(1 + \frac{\delta^2}{4} \ldots\ldots\right)$. Es ſei $90° - \alpha\beta = \alpha$, SM = n, CM = c; die Breite von S heiße λ′ und die Normale von A, N.

Die Abſciſſe *) von S iſt offenbar $= n\cos\alpha$ und die Ordinate $= n\sin\alpha - c$; alſo die tang. der Breite von S, oder $\tan\lambda' = \frac{n\sin\alpha - c}{(1 - e^2)\,n\cos\alpha}$, folglich

*) In der Ellipſe PS.

Digitized by Google

$\text{tang}\,\lambda' - \text{tang}\,\alpha = \frac{n \sin\alpha - c}{(1-e^2)\, n \cos\alpha} - \text{tang}\,\alpha = \frac{n e^2 \sin\alpha - c}{(1-e^2)\, n \cos\alpha}$. Beobachtet man, daß $\text{tang}\,\lambda' - \text{tang}\,\alpha = \frac{\sin(\lambda'-\alpha)}{\cos\lambda' \cos\alpha}$ iſt, ſo wird $\sin(\lambda'-\alpha) = \frac{(n e^2 \sin\alpha - c)\cos\lambda'}{(1-e^2)\, n}$; nun iſt $c = N e^2 \sin\lambda$; ſetzt man auch für $\sin\alpha$ ſeinen Werth $\sin\lambda\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)$, ſo wird:

$$\sin(\lambda'-\alpha) = \frac{\left(n e^2 \sin\lambda\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right) - N e^2 \sin\lambda\right)\cos\lambda'}{(1-e^2)\, n} = \frac{e^2 \sin\lambda\left(n\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right) - N\right)\cos\lambda'}{(1-e^2)\, n}.$$

Um zu finden, wie groß der Unterſchied der Linien n und N ſeyn kann, denken wir die Ebene PMA um PM gedreht, bis ſie auf die Ebene PMS kömmt; dann wird man die Lage der Linie MA erhalten können, wenn man aus M Fig. XXVI. bis b) eine Normale MA zieht; nun ſei AS′ eine Tangente, ſo iſt in dem geradlinigen Dreiecke MAS′ offenbar $MA = MS' \cdot \cos SMA$, oder $N = MS' \cdot \cos(\alpha - \lambda)$. Aber aus $\sin\alpha = \sin\lambda + \frac{\delta^2}{4} \cdot \sin\lambda$ findet man $\alpha = \lambda + \frac{1}{4}\delta^2 \text{tang}\,\lambda$, woher $\cos(\alpha-\lambda) = 1 - \frac{1}{16}\delta^4 \text{tang}^2\lambda$; mithin iſt $MS' - N = \frac{MS'}{16}\delta^4 \text{tang}^2\lambda$, alſo $n - N$, welches noch weniger als $MS' - N$ beträgt, wenigſtens von der 4ten Ordnung; will man daher blos die niedrigſten Ordnungen beibehalten, ſo kann man $n = N$ und folglich $\sin(\lambda'-\alpha) = \frac{e^2 \sin\lambda \cdot \frac{\delta^2}{4} \cdot \cos\lambda'}{(1-e^2)} = e^2 \sin\lambda \cdot \frac{\delta^2}{4} \cdot \cos\lambda'$ ſetzen. Aber der Winkel, welchen IS mit der Tangente in S macht, iſt $90° - (\lambda' - \alpha)$. Nimmt man daher den kleinen Bogen TS dem Stücke der Tangente gleich, welches zwiſchen IS und IT liegt, ſo iſt $TS = IS \cdot \sin(\lambda'-\alpha)$, und da $IS = N \cdot \frac{\delta^2}{8}$ iſt, ſo wird $TS = N e^2 \sin\lambda \frac{\delta^4}{32} \cdot \cos\lambda'$, eine Größe 5ter Ordnung. Der Unterſchied der geodätiſchen Linie und des Bogens ASB iſt alſo auch wenigſtens von dieſer Ordnung.

Der dritte Fall läßt ſich in Gemäßheit der früheren Bemerkungen (102) auf die beiden vorigen zurückführen.

Um den Unterſchied des Kreisbogens AK Fig. XXX. und des elliptiſchen $A'\alpha A$ zu finden, kann man $A'\alpha A$ und AK als gerade Linien anſehen, da man nur den Theil dieſes

Digitized by Google

Unterſchiedes wiſſen will, welcher von der niedrigſten Ordnung iſt. Dann iſt aber das Dreieck AKM in K und das Dreieck $A\alpha A'M$ in A rechtwinkelig; dieſe Dreieck ſind alſo ähnlich, und es verhält ſich $AK : A\alpha A' = MA : MA'$, woher

$$A\alpha A' - AK = \frac{A'M - AM}{AM} . AK = (A'M - AM)\frac{S'}{N};$$ nun iſt

$A'M : A'M' = \sin PM'A' : \sin (PM'A' + I) = \cos L' : \cos (L' - I)$, alſo

$A'M = \frac{A'M' . \cos L'}{\cos L' + I \sin L'} = A'M' (1 - I \operatorname{tang} L')$; aber $A'M'$ und AM ſind nur durch Glieder zweiter Ordnung verſchieden; es ergiebt ſich alſo, daß der Unterſchied $A'M - AM$ zweiter Ordnung, und folglich $A\alpha A' - AK$ dritter Ordnung iſt. —

Das Vorige wird man leicht auf den zweiten Fall (102) anwenden, wenn man nur die Hälfte des elliptiſchen Bogens ASB, Fig. XXVI. bis a), mit der Hälfte des aus M als Centrum von A nach B beſchriebenen Kreisbogens vergleicht, und der Unterſchied wird von noch geringerer Ordnung als vorhin ſeyn.

Da nun $S' - S$ aus den beiden Unterſchieden $A\alpha A' - AK$ und $S - A\alpha A'$, wovon der erſte von der dritten Ordnung und der zweite von der fünften Ordnung iſt, beſteht, ſo kann $S' - S$ nur von der dritten Ordnung ſeyn.

110) $v - V$ zu finden.

Weil die Bogen $A'\alpha A$ und KA Fig. XXX. in der nämlichen Ebene liegen, und AM auf beiden in A ſenkrecht ſteht, ſo haben ſie in A einerlei Tangente; daſſelbe gilt von AP und AP'; der Winkel von $A'\alpha A$ mit AP iſt alſo der nämliche wie der Winkel von AK mit AP', welcher v iſt. Da nun die geodätiſche Linie zwiſchen $A'\beta A$ und $A'\alpha A$ liegt, ſo iſt der Winkel $A'\alpha AP$ von dem Azimuthe V weniger verſchieden als von $A'\beta AP$; und weil $A'\alpha AP = v$ iſt, ſo wird $v - V$ kleiner als der Winkel ſeyn, welchen die Linien $A'\alpha A$ und $A'\beta A$ miteinander machen.

Nun ſeien Fig. XXXI. Ar und At Tangenten an die Bogen A'qA, ApA', welche hier die $A\alpha A'$, $A\beta A'$ vorſtellen; man beſchreibe aus A eine Kugelfläche, ſo entſteht ein ſphäriſches Dreieck xyz, wo $yz = rAt$ iſt, und wo man $xy = xz = rAA' = \frac{\delta}{2 \sin 1''}$ ſetzen kann, da man nur die niedrigſten Ordnungen berechnet. Der Winkel bei x iſt der nämliche wie man in (109) oder $I \sin v'$.

Digitized by Google

Aber es ist $\cos(yz) = \cos^2\left(\frac{\delta}{2\sin 1''}\right) + \sin^2\left(\frac{\delta}{2\sin 1''}\right)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\sin^2\left(\frac{\delta}{2\sin 1''}\right)$

oder $2\sin^2\frac{1}{2}(yz) = \frac{\delta^2 . x^2}{8}$, woher $(yz)^2 = \frac{\delta^2 x^2}{4}$ und $yz = \frac{\delta x}{2} = \frac{I\delta \sin v'}{2}$. Dieses ist der Werth des Winkels, den $A\alpha A'$ und $A\beta A'$ machen; er ist, wie man sieht, von der dritten Ordnung, und $v - V$ muß noch weniger betragen.

111) $v' - V'$ zu finden.

Fig XXX. ter sei alles gleichbezeichnete das nämliche wie in Fig. XXX., und ferner bedeute $A'\gamma$ die geodätische Linie; $A'O$, $A't$, $A'S$, $A'r$ sind Tangenten an $A'P$, $A'\alpha$, $A'\gamma$, $A'\beta$; dann ist $V' = SA'O$ und folglich $V' - tA'O < tA'r$; $tA'r$ ist aus (110) $= \frac{I\delta \sin v'}{2}$. Es ist also $V' - tA'O < \frac{I\delta \sin v'}{2}$. Nun müssen wir $tA'O$ in Function von v' finden. Man beschreibe aus A' mit einem willkührlichen Radius eine Kugelfläche, so entsteht das sphärische Dreieck NQT, welches in N rechtwinkelig ist; denn N ist der Winkel der Ebene $A'OM$ oder $PA'M'$ mit der Ebene $OA'T$, und OA', $A'T$ stehen beide auf $A'M'$ senkrecht. Die Seite NQ des Dreieckes NQT ist offenbar $90° - I$; der Winkel NQT ist ein Winkel der Ebenen $MA'A$, $MA'P$, folglich $180° - v'$; die Seite NT ist $OA'T$ oder $180° - OA't$.

Nun ist $\operatorname{tang} NT = \operatorname{tang} NQT \sin NQ$ (58), woher

$\operatorname{tang} OA't = \operatorname{tang} v' . \cos I = \operatorname{tang} v'\left(1 - \frac{I^2}{2}\right) = \operatorname{tang} v' - \frac{I^2 \operatorname{tang} v'}{2}$; hieraus kann man leicht ziehen, daß $OA't = v' - \frac{I^2 . \sin 2v'}{4}$ ist.

Nach dem Obigen ist also: $V' - v' < \frac{I\delta \sin v'}{2} - \frac{I^2 \sin 2v'}{4}$. Die eine dieser Größen ist von der dritten, und die andere von der vierten Ordnung; $V' - v'$ ist also höchstens von der dritten Ordnung.

Im zweiten Falle (102) ist $V' - v' = V - v$.

112) Mit Hülfe der Formeln aus (93) kann man durch λ, v, S, die Größen λ', v', S' finden.

---

*) Der ganze §. (110) ist auf den zweiten Fall anwendbar, wenn man nur für man den Winkel TIS Fig. XXVI. bis a) setzt.

Digitized by Google

P' ist, wie (107) bemerkt wurde, gleich P, und wenn man in den eben genannten Formeln die Glieder dritter Ordnung weglassen will, so kann man, wie die vorhergehenden §§. beweisen, $S'=S$, $v=V$, und auch $V'=v'$ setzen. Man erhält dann:

$$a)\quad \lambda'=\lambda+\frac{S\cos V}{R\sin 1''}-\frac{S^2}{R^2}\frac{\sin^2 V\tang\lambda}{2\sin 1''}$$

$$b)\quad P=\frac{\sin V}{\cos\lambda\sin 1''}\left(\frac{S}{R}+\tang\lambda\cos V\frac{S^2}{R^2}\right)$$

$$c)\quad V'=V+\frac{S}{R}\frac{\sin V\tang\lambda}{\sin 1''}+\frac{S^2}{R^2}\frac{\sin V\cos V}{\sin 1''}\left(\tfrac{1}{2}+\tang^2\lambda\right).$$

Nun ist aus (108) $L'-\lambda'=e^2(\lambda'-\lambda)\cos^2\lambda$, folglich: $L'=\lambda+(\lambda'-\lambda)(1+e^2\cos^2\lambda)$ also $L'=\lambda+\left\{\frac{S\cos V}{R\sin 1''}-\frac{S^2}{R^2}\frac{\sin^2 V\tang\lambda}{2\sin 1''}\right\}\{1+e^2\cos^2\lambda\}$, oder weil $\frac{S}{R}$ von der Ordnung e^2 ist, endlich:

$$a')\quad L'=\lambda+\frac{S\cos V}{R\sin 1''}-\frac{S^2}{R^2}\frac{\sin^2 V\tang\lambda}{2\sin 1''}+\frac{S.e^2.\cos V\cos^2\lambda}{R\sin 1''}.$$

Die Formeln (a'), (b), (c), enthalten die Auflösung der Aufgabe in (107). Diese Formeln sind so lange genau, als AA' klein genug ist, damit man die Glieder dritter Ordnung vernachläßigen könne. Der Radius R in denselben, ist $MA=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$. Diesen muß man zuerst berechnen, welches am leichtesten durch seinen Logarithmen geschieht; denn es ist: $\log R=\log a-\frac{1}{2}\log(1-e^2\sin^2\lambda)=\log a+\frac{1}{2}ke^2\sin^2\lambda$, wo $k=0{,}4342945$ ist.

Die vorhergehenden Formeln sind zuerst von Delambre gegeben worden. (Anwendung (224).)

113) Wir wollen hier für das Beispiel aus (93) bis), die Breite von B nach der Formel (a') berechnen, um den Einfluß der Excentricität zu beobachten.

1. Berechnung von R.

$\log k=$	$\bar{1}{,}63777$	$\frac{1}{2}ke^2\sin^2\lambda=$	$0{,}9007900$
$\log e^2=$	$\bar{3}{,}81084$	$\log a=$	$6{,}8046154$
$2\log\sin\lambda=$	$\bar{1}{,}75336$	$\log R=$	$6{,}8054114$
$-\log 2=$	$\bar{1}{,}69897$		
$\log\frac{1}{2}ke^2\sin^2\lambda=$	$\bar{4}{,}90094$		
$\frac{1}{2}ke^2\sin^2\lambda=$	$0{,}0007960$		

Digitized by Google

2. Berechnung von $L' - \lambda$.

$\log S = 4{,}9531022$	$2 \log S = 9{,}90620$	$\log S = 4{,}95310$
$\log \cos V = \bar{1}{,}9541721$	$-2 \log R = \bar{14}{,}38918$	$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$
$-\log R = \bar{7}{,}1945886$	$2 \log \sin V = \bar{1}{,}27936$	$\log \cos V = \bar{1}{,}95417$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$	$\log \text{tang} \lambda = 0{,}05834$	$2 \log \cos \lambda = \bar{1}{,}63678$
$\log$ 2tes Gl. $= \bar{3}{,}4162880$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	$-\log R = \bar{7}{,}19459$
2tes Gl. $= -2607'',88$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31442$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
	$\log$ 3tes Gl. $= 0{,}64647$	$\log$ 4tes Gl. $= 0{,}86391$
	3tes Gl. $= -4'',43$	4tes Gl. $= -7'',31$.

Die drei Glieder zusammengenommen geben .... 2619″, 62.

Nach den früheren Formeln betrug der Breitenunterschied 2621″, 55; die Excentricität hat also hier einen Einfluß von 1″, 93, welcher nicht vernachläßigt werden darf, und, wie man sieht, weit größer ist, als der Betrag der Glieder in $\frac{S^3}{R^3}$.

In dem gegenwärtigen Beispiele ist $\frac{S}{R}$ größer als e^2; man kann deswegen nicht wohl die Glieder in $\frac{S^3}{R^3}$ noch die in $\frac{S^2 e^2}{R^2}$, $\frac{e^4 S}{R}$ weglassen, deren Einfluß wir im folgenden Kapitel kennen lernen werden.

114) Wir gehen jetzt zu der Aufgabe über, welche in (99), in der Unterstellung, daß die Erde sphärisch sei, aufgelößt wurde.

Da in dem gegenwärtigen Falle die Perpendiculären (105) die Eigenschaften nicht haben, worauf sich die eben angeführte Auflösung gründet, so wollen wir von derselben ganz absehen, und eine neue geben, worin die Excentricität der Erde soweit wie in den Formeln von (112) beachtet ist.

Fig. XXXII. seien PAP', PMP' die Meridiane von A und M; die geodätische Linie MK stehe auf AP senkrecht; der Winkel APM, welcher der Längenunterschied von M und K und auch von A und M ist, heiße P; die Breite von A sei L, die von K sei l, die von M, λ.

Wir wollen zuerst folgende Hülfs-Aufgabe lösen:

wenn die Bogen AK = x, MK = y, in Längenmaaß, und die Breite von A, gegeben sind, die Breite von M und den Winkel P zu finden.

Digitized by Google

Nach dem vorigen §. iſt $\lambda - l = \left(\frac{y \cos V}{N \sin 1''} - \frac{y^2}{N^2} \frac{\sin^2 V \tang l}{2 \sin 1''}\right)(1 + e^2 \cos^2 l)$, wo $N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$ (105). Aber hier iſt $V = MKP = 90°$, alſo:

$\lambda - l = -\frac{y^2}{N^2} \frac{\tang l}{2 \sin 1''}$ ..... (α). Dieſe Formel giebt λ, wenn l bekannt iſt; l muß aus L und x berechnet werden.

Es ſei $l = f(x)$; ſo iſt $l = f(o) + x f'(o) + \frac{x^2}{2} f''(o)$, wo nämlich $f'(o) = \frac{dl}{dx}$, $f''(o) = \frac{d^2 l}{dx^2}$ iſt, wenn man in dieſen Differentialcoefficienten $x = o$ ſetzt; $f(o)$ iſt offenbar $= L$. Nun iſt hier x das S aus (104), und deswegen: $\frac{dl}{dx} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)}$, oder weil wir nur Glieder mit e^2 beibehalten, $\frac{dl}{dx} = \frac{(1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l)(1 + e^2)}{a} = \frac{1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l}{a}$; macht man darin $x = o$, ſo wird $f'(o) = \frac{1}{a}(1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L)$. Es iſt nun ferner

$$\frac{d^2 l}{dx} = \frac{-\frac{3}{2} e^2 . 2 \sin l \cos l . dl}{a} = \frac{-\frac{3}{2} e^2 . 2 \sin l \cos l . dx}{a^2};$$ mithin

$f''(o) = -\frac{3}{2} . \frac{e^2 \sin 2L}{a^2}$; da nun $x^2 f''(o)$ von der dritten Ordnung ſeyn wird, ſo bleibt es weg, und man hat: $l = L + \frac{x}{a \sin 1''}(1 + e^2 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 L)$ .... (β).

P finden wir durch die ſphäriſche Formel, woher $P = \frac{y}{N \cos l . \sin 1''}$ ... (γ). Die Formeln (α), (β), (γ), enthalten die Auflöſung unſerer Hülfs-Aufgabe. (Anwendung (270).)

115) Wir kommen nun zu unſerer eigentlichen Aufgabe, welche heißt: **wenn L, P und λ gegeben ſind, x und y zu finden.**

Um dieſe aufzulöſen, nehmen wir die Formeln (α) und (γ), und ſetzen in denſelben für N ſeinen Werth $a(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l)$, ſo wird $N^2 = a^2(1 + e^2 \sin^2 l)$,

$\lambda = l - \frac{y^2 \tang l}{2 a^2 \sin 1''}(1 - e^2 \sin^2 l) = l - \frac{y^2 \tang l}{2 a^2 \sin 1''}$ .. (α'), $P = \frac{y}{a \cos l \sin 1''}(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l)$ ... (β').

Aus (β') folgt $y = P a \cos l \sin 1''(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l)$, folglich $y^2 = P^2 a^2 \cos^2 l \sin^2 1''$; ſetzt man für y^2 dieſen Werth in (α'), ſo wird $\lambda = l - \frac{P^2 \sin 2l . \sin 1''}{4}$; da nun hier-

Digitized by Google

nach λ und l nur durch Glieder zweiter Ordnung verschieden sind, so kann man $\lambda = l - \frac{P^2 \sin 2\lambda \sin 1''}{4}$ setzen; mithin ist (a)... $l = \lambda + \frac{P^2 \sin 2\lambda . \sin 1''}{4}$, und aus der nämlichen Ursache (b)... $y = aP \cos\lambda \sin 1'' (1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2\lambda)$.

Um x zu berechnen, bemerken wir, daß die Breiten der Endpuncte dieses Bogens gegeben sind, welche hier L und l heißen. Wir können also die Formeln aus (104) anwenden, und weil wir nur Glieder mit e^2 beibehalten, so ist hier:
$A = 1 - \frac{1}{4} e^2$, $B = \frac{3}{4} e^2$, $C = 0$; mithin

$$x = S - S' = a\left(A(l - L) \sin 1'' - \frac{B}{2}(\sin 2l - \sin 2L)\right) \text{ oder}$$

$$x = a\left[A(l - L) \sin 1'' - \frac{B}{2}(\sin 2L \cos 2(l - L) + \sin 2(l - L) \cos 2L - \sin 2L)\right]$$

und da B von der ersten Ordnung ist, können wir $\cos 2(l - L) = 1$ setzen; es wird also:

$$x = a\left(A(l - L) \sin 1'' - B(l - L) \sin 1'' \cos 2L\right) =$$

$$= a\left\{(l - L) \sin 1'' - (l - L) \sin 1''\left(\tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{3}{4} e^2 \cos 2L\right)\right\} \ldots (c)$$ (Anwendung (245).)

116) Wir wollen nun noch untersuchen, welchen Einfluß die Excentricität der Erde in den unmittelbaren Messungen, und in der Auflösung der Dreiecke des trigonometrischen Netzes hat.

1. In der Messung der Basis.

Wenn man die Basis der Ebene AαB Fig. XIV. absteckt, so wird man in der Richtung derselben einen Irrthum begehen, welcher in (109), unter dem Namen der zweiten Krümmung der geodätischen Linie, berechnet ist; wie wir gesehen haben ist er sehr klein; besonders kann er hier gar nicht in Betracht kommen, da eine kleine Abweichung von der Richtung, einen noch weit kleinern Irrthum in der Länge hervorbringt, und wir hier nur die Messung dieser Länge bezwecken.

Um jedoch den allenfallsigen Irrthum zu schätzen, ist Folgendes: die zweite Krümmung aus (109) war $pq = AM \times \frac{\delta^2}{8} \times I \sin v'$, und da man nur die Glieder von der geringsten Ordnung beibehält, so ist in dem Werthe von pq, $AM = a$, $I = e^2 . \Delta'\lambda . \cos^2\lambda$, auch $v' = V$ und $\Delta'\lambda = \delta \cos V$ zu setzen; also: $pq = a \times \frac{e^2 \delta^2}{8} \delta \cos V \cos^2\lambda \sin V = \ldots\ldots$
$= \frac{a e^2}{16} \delta^3 . \cos^2\lambda . \sin 2V$. λ ist gewöhnlich nicht weit von 45°; $\sin 2V$ wird am größten

Digitized by Google

für $V = 45°$; δ ist die geodätische Linie in Theilen von AM oder a, mithin bei der Basis von Melun $\frac{\text{Toif.}\ 6076}{\text{a in Toisen}}$. Der Ausdruck pq ist demnach kleiner als $\frac{e^2 (6076)^3}{16 . 2 . a^2}$; a ist in Toisen wenigstens 3000000, $e^2 = 0{,}006$, also $pq < \text{Toisen}\ 0{,}0000045$, welche Größe so klein ist, daß sie bei weitem unter den Irrthümern der Beobachtungen bleibt.

In den Reductionen, welche die gemessene Basis noch leiden muß, kann man den Einfluß der Excentricität weglassen. Denn, was

a) die Reduction auf den Horizont betrifft, so haben wir früher (88) k) bewiesen, daß man bei der Berechnung derselben die Krümmung der Erdfläche ganz ausser Acht lassen könne, und also gewiß eine kleine Veränderung dieser Krümmung, wie wir hier den Einfluß der Excentricität füglich nennen können, nicht in Anschlag gebracht zu werden brauche.

b) Rücksichtlich auf die Reduction zur Meeresfläche.

Fig. XVI. sind die beiden Linien Aw und $\alpha\beta$ sehr wenig verschieden; der Einfluß der Excentricität auf beide muß also gleichgesetzt werden können; daraus folgt, daß die Differenz dieser Linien die nämliche ist, als wenn die Excentricität Null wäre, woraus man sieht, daß die, in dieser Unterstellung berechnete Reduction, als richtig angenommen werden dürfe.

c) Die Reduction der Basis auf die Sehne ist so klein, daß merkliche Irrthümer, sowohl in der Länge der geodätischen Linie, als in dem Radius derselben, auf diese Reduction kaum Einfluß haben. Hieraus ergiebt sich hinlänglich, daß man in ihrer Berechnung die Excentricität gleich Null betrachten könne.

2. In der Messung der Winkel. Fig. XVII.

Die Excentricität der Erde hat einen doppelten Einfluß bei der Reduction der Winkel auf den Horizont, welchen wir in Folgendem schätzen wollen.

Wenn man die Methode, die wir zu dieser Reduction befolgten, aufmerksam betrachtet, so wird man einsehen, daß dadurch nicht der Winkel der geodätischen Linien ab, ac Fig. XVII, sondern der Winkel zweier Linien gefunden wurde, welche die Durchschnitte des Ellipsoids mit den Ebenen zaB, zaC sind. Nun weichen diese Durchschnitte erstens von denen ab, welche die Ebenen zab, zac mit dem Ellipsoide bilden, und zweitens sind die letzteren wieder von den geodätischen Linien verschieden.

Digitized by Google

Die zweite Abweichung ist offenbar weniger, als der in (110) berechnete Winkel yz, aber die erste müssen wir noch suchen. Hierzu seien in Fig. XVII. bis), A, z, a, b, B die nämlichen wie in Fig. XVII.; P ist der Pol, Pa, Pb sind die Meridiane von a, b; aM, bM′ ihre Normalen. Wenn man durch zaM und B eine Ebene legt, so wird diese die Ebene PMB in BM schneiden, und der Durchschnitt von zMB mit dem Ellipsoide muß durch K gehen; er sei AK. Der Winkel Kab soll hier berechnet werden.

Es sei $bM' = N$, $bB = h$, $BM'P = 90° - \lambda$, $MM' = c = ae^2 \cos\lambda . \Delta\lambda$, wenn $\Delta\lambda$ den Breitenunterschied von a und b bedeutet. Nun ist in dem Dreieck BMM′, $c : N + h = \sin B : \sin(90° + B - \lambda)$, oder, wenn man blos die Glieder von der niedrigsten Ordnung beibehält, $c : a = B : \cos\lambda$, woher $B = \frac{c \cdot \cos\lambda}{a} = e^2 \cos^2\lambda . \Delta\lambda$. In dem Dreieck BKb, welches in b rechtwinkelig ist, findet man $Kb = h . B = he^2 \cos^2\lambda . \Delta\lambda$. Nennt man $Pba = V$ und $\frac{ba}{N} = \delta$ wie früher, so ist $\Delta\lambda = \delta \cos V$, also $Kb = he^2 \delta \cos V \cos^2\lambda$. Um nun den Winkel Kab zu finden, hat man $ba : Kb = \sin V : Kab$, also

$$Kab = \frac{Kb . \sin V}{ba} = \frac{he^2 \cos^2\lambda \sin 2V}{2N \sin 1''}.$$

Man nehme $\lambda = 45°$, so erreicht der vorige Ausdruck sein maximum, wenn $V = 45°$ wird, und dann ist $Kab = \frac{he^2}{4N \sin 1''}$; $\frac{h}{N}$ ist aber meistens nicht über $\frac{1}{10000}$ und folglich $Kab = \frac{e^2}{40000 \sin 1''} = 0'',03$.

Die zweite Abweichung ist $< yz$ (110), welcher $\frac{I\delta \sin v'}{2} = \frac{e^2 \Delta\lambda \cos^2\lambda . \delta \sin v'}{2}$ beträgt; setzt man auch hier $\Delta\lambda = \delta \cos V$ und $V = v'$, so wird $yz = \frac{e^2 \delta^2 \cos^2\lambda \sin 2V}{4 \sin 1''}$. Nehmen wir an, die geodätische Linie sei eine der größten, welche vorkommen, und $= 45000$ Met.; $\lambda = 45°$, $V = 45°$; so ist: $\delta = \frac{45000}{6000000} = \frac{3}{400}$, und $yz = \frac{e^2 \delta^2}{8 \sin 1''} =$

$$= \frac{9e^2}{1280000 \sin 1''} = 0'',0086.$$

Wollte man nun auch unterstellen, daß keine von den eben berechneten Abweichungen sich mit der anderen compensire, so könnte doch der Irrthum für einen Winkel höchstens $2Kab + 2yz$ oder $0'',077$ betragen; diese Größe ist aber, wie wir aus dem sogleich

Digitized by Google

folgenden Beispiele sehen werden, unter den Irrthümern der Beobachtungen, und kann daher vernachläßigt werden *). —

Die Reduction der Winkel auf das Centrum ist von der Gestalt der Erde ganz unabhängig.

3. Bei der Berechnung der Dreiecke.

Wenn man auch die doppelte Krümmung und die elliptische Form der geodätischen Linien außer Acht lassen wollte, und jede als einen Kreisbogen ansähe, so würden doch deswegen die geodätischen Dreiecke keine sphärische seyn; denn hierzu gehörte, daß die Radien der drei Seiten die nämlichen wären, und alle aus einem gemeinschaftlichen Centrum ausgiengen. Löste man also die Dreiecke wie sphärische auf, so könnte man die Richtigkeit der Resultate bezweiflen. Man weicht dieser Schwierigkeit aus, indem man anstatt der krummlinigen Dreiecke diejenigen auflöst, welche die Sehnen bilden, und von diesen wieder zu den ersten übergeht, welches auf folgende Art geschieht:

Zuerst berechnet man aus der bekannten Länge der einen Seite des Dreieckes die zugehörige Sehne, wie wir es für die Basis (88) h) thaten; dann muß man aus den Winkeln der krummen Linien die der Sehnen berechnen **), wie folgt.

Es seien Fig. XXXIII. A, B, C die Ecken eines geodätischen Dreieckes; ZA die Verticale von A; mA, nA Tangenten an $A\alpha B$ und $A\beta C$, welche die Durchschnitte des Ellipsoids mit den Ebenen ZAB, ZAC sind. mAn ist gegeben, und der Winkel der Sehnen BAC soll gefunden werden. Der Winkel mAB ist $\frac{AB}{2}$ und $nAC = \frac{AC}{2}$ wenn man die Größen dritter Ordnung vernachläßigt. Sind AB, AC in Längenmaaß gegeben, so ist $mAB = \frac{AB}{2.R.\sin 1''}$; $nAC = \frac{AC}{2.R.\sin 1''}$.

---

*) Wenn in sehr großen Höhen über der Meeresfläche gearbeitet würde, oder wenn man die Genauigkeit auf das Aeußerste treiben wollte, so könnte der Winkel Kab berechnet werden. Die Lage der Puncte a, b würde dann bestimmen, ob er addirt oder subtrahirt werden müßte.

**) Es ist hierzu, wie das Folgende zeigen wird, nur nothwendig den Winkel der Durchschnittslinien der Ebenen zab, zac Fig. XVII. mit dem Ellipsoide, und nicht den Winkel der geodätischen Linien selbst, zu kennen; die zweite Abweichung, welche in 2) geschätzt wurde, kömmt also außer Wirksamkeit, und man könnte der gegenwärtigen Methode die größte Genauigkeit in Hinsicht auf die Beobachtungen geben, wenn man die erste Abweichung jedesmal berechnete, und die gemessenen Winkel davon corrigirte.

Digitized by Google

Um dieſe Größen zu berechnen braucht man für AB und AC keine genaue Werthe, und man kann für R einen mittleren Werth annehmen; der Irrthum wird immer nur ſehr klein ſeyn, und wegen des Gebrauches, den man von den Winkeln mAB, nAC macht, einen noch weit unbedeutendern Einfluß haben. mA und nA liegen in den Ebenen ZAB, ZAC und ſtehen auf ZA ſenkrecht; vergleicht man daher den gegenwärtigen Fall (89) b) mit der Reduction auf den Horizont, und nennt

$\frac{A}{2R \sin 1''}$, α, und $\frac{AC}{2R \sin 1''}$, β, ſo iſt:

$mAn - BAC = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \sin 1'' \tang \frac{1}{2}(BAC) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2}(BAC)$, und da mAn und BAC nur durch Glieder zweiter Ordnung verſchieden ſind, ſo kann man nur Glieder 4ter Ordnung vernachläßigen, wenn man

$BAC - mAn = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2}(mAn) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \sin 1'' \tang \frac{1}{2}(mAn)$ ſchreibt, woraus man BAC findet.

Um ein Beiſpiel von der Anwendung dieſer Methode zu geben, nehmen wir daſſelbe wie in (91), und benutzen zum Theil die dort gemachten Rechnungen; man hat alſo:

die genaue Länge von Bort nach Hermant	= 40290,3527 Met.	= a
die ohngefähre . . . . . Lafagitière	= 41650	= b
. . . . . Hermant	= 24906	= c.

Die auf den Horizont und das Centrum reduzirten Winkel:

bei Bort	= 35°, 20′, 29″, 3
Hermant	= 75°, 18′, 45″, 965
Lafagitière	= 69°, 20′, 48″, 50
Zuſammen	180°, 00′, 3″, 595.

Wir wollen nun die Größen $\frac{a}{2R.\sin 1'}$, $\frac{b}{2R \sin 1'}$, $\frac{c}{2R \sin 1'}$, welche dann in Minuten ausgedrückt ſeyn werden, berechnen.

$$\left.\begin{aligned} \log a &= 4{,}60516 \\ -\log R &= \bar{7},19612 \\ -\log 2 &= \bar{1},69897 \\ -\log \sin 1' &= 3{,}536\,27 \\ \log \frac{a}{2R \sin 1'} &= 1{,}03652 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{a}{2R \sin 1'} = 10',877$. Ebenſo findet man $\frac{b}{2R \sin 1'} = 11',245$, $\frac{c}{2R \sin 1'} = 6',723$.

Digitized by Google

Mit Hülfe dieser Größen ist es leicht, den Unterschied der krummlinigen und geradlinigen Winkel zu berechnen; man findet ihn bei Bort $= -0'',67$, bei Hermant $= -0'',92$ bei Lafagitière $= -0'',84$. Die Winkel der Sehnen wären demnach:

$$\begin{array}{rl} \text{bei Bort} = & 35^\circ,\ 20',\ 28'',\ 46, \\ \text{Hermant} = & 75^\circ,\ 18',\ 45'',\ 04, \\ \text{Lafagitière} = & 69^\circ,\ 20',\ 47'',\ 66 \\ \hline \text{Zusammen} & 180^\circ,\ 00',\ 1'',\ 16. \end{array}$$

Diese Winkel sollten zusammen genau 180° ausmachen; es befindet sich also in denselben ein Irrthum der Beobachtungen gleich $1'',16$. Dieser wird, wie wir es früher (90) beschlossen haben, in gleichen Theilen von jedem Winkel abgezogen; es ist also noch $0'',39$ von jedem Winkel abzuziehen; sie werden dann:

$$\begin{array}{rl} \text{Bort} = & 35^\circ,\ 20',\ 28'',\ 07 \\ \text{Hermant} = & 75^\circ,\ 18',\ 44'',\ 65 \\ \text{Lafagitière} = & 69^\circ,\ 20',\ 47'',\ 27 \\ \hline \text{Zusammen} & 180^\circ,\ 00',\ 0'',\ 01. \end{array}$$

Wir müssen nun noch die Länge der Sehne Bort. Hermant aus dem bekannten Werthe des Bogens berechnen.

Es ist Bog. — Sehne $= \dfrac{(\text{bog})^3}{24 \cdot R^2}$

$$\begin{array}{rl} 3 \log . \text{bog.} = & 13,8156033 \\ -\log 24 = & \bar{2},6197888 \\ -2 \log R = & \overline{14},3922498 \\ \hline & \bar{2},8276419 \end{array}$$

$$\text{Bog.} - \text{Sehne} = \overset{\text{Met.}}{0,06724}$$

$$\text{Sehne} = \overset{\text{Met.}}{40290,2855}$$

Nun lösen wir das Dreieck der Sehnen wie jedes andere geradlinige auf und finden:

$$\text{Sehne Bort. Laf.} = \overset{\text{Met.}}{41650,587}. \quad \text{Sehne H. L.} = \overset{\text{Met.}}{24906,381}.$$

Will man die Bogen haben, so ist Bog. — Sehn. $= \dfrac{(\text{Sehne})^3}{24 \cdot R^2}$, also

$$\begin{array}{lll} \text{Bog. Bort. Laf.} = \overset{\text{Met.}}{41650,651}, & \text{Bog. Herm. L.} = \overset{\text{Met.}}{24906,397} \\ \text{früher fanden wir} \ . \ 41650,65 \ldots\ldots\ldots\ldots & 24906,44 \\ \hline \text{Unterschiede} \ldots\ldots\ 0,001 \ldots\ldots\ldots\ldots & -0,043 \end{array}$$

Diese Unterschiede können in der Rechnung nicht in Betracht kommen, weil man solchen Irrthümern immer ausgesetzt ist, wenn auch die Formeln und die Beobachtungen

Digitized by Google

vollkommen genau wären, indem die Logarithmen-Tafeln nicht gewiß mehr als sechs genaue Ziffern in den Zahlen geben, wie wir es früher (20) zeigten.

(Eine andere Anwendung siehe (215).)

Anmerkung. Wenn man, um die Reduction der krummlinigen Winkel auf die der Sehnen zu berechnen, die angenäherten Werthe von a, b, und den mittleren Werth von R braucht, so erhält man in den Größen α, β, Irrthümer, deren Einfluß auf die Reduction des Winkels wir hier schätzen wollen.

Es fehle δ an R und δ' an a. Man findet $\alpha = \frac{a}{2R \sin 1''}$ und sollte $\alpha = \frac{a+\delta'}{2(R+\delta)\sin 1''}$ haben; der Irrthum ist also: $\frac{a}{2R \sin 1''}\left(1 - \frac{1+\frac{\delta'}{a}}{1+\frac{\delta}{R}}\right)$ oder, wenn man nur die niedrigsten Ordnungen beibehält: $\frac{a}{2R \sin 1''}\left(\frac{\delta}{R} - \frac{\delta'}{a}\right)$.

Der schlimmste Fall wäre, wenn δ und δ' verschiedene Zeichen hätten; also beträgt der Irrthum höchstens $\alpha\left(\frac{\delta}{R} + \frac{\delta'}{a}\right)$. Vergleicht man im gegenwärtigen Beispiele den ohngefähren Werth von a mit seinem wahren Werthe, so sieht man, daß $\frac{\delta'}{a} < \frac{1}{10000}$ ist; $\frac{\delta}{R}$ ist aber $< \frac{1}{600}$, wenn R der mittlere Werth des Erde-Radius ist, wie man sehen kann, wenn man den mittleren Werth des Erde-Radius mit dem der Normale bei 60° Breite, welche der größte Krümmungshalbmesser ist, der in unsern Gegenden wohl vorkommen kann, (105) vergleicht. Sollte nun auch $\frac{\delta'}{a}$ 10mal mehr betragen als hier, so ist der Irrthum in α doch höchstens $\alpha\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{1000}\right)$ oder $\alpha\left(\frac{16}{6000}\right)$. Wäre nun in β ein eben so starker Irrthum, so müßten anstatt $(\alpha+\beta)$ und $(\alpha-\beta)$ die Größen $(\alpha+\beta)\left(1+\frac{16}{6000}\right)$ und $(\alpha-\beta)\left(1+\frac{16}{6000}\right)$ stehen. Die ganze Reduction der Winkel auf die Sehne würde daher mit dem Factor $\left(1+\frac{16}{6000}\right)^2$ oder beinahe $1+\frac{16}{3000}$ multiplizirt; folglich betrüge der Irrthum

Digitized by Google

in dieser Reduction $\frac{16}{3000}$ derselben. Die größte unter allen in gegenwärtigem Beispiele ist 0″,92; davon $\frac{16}{3000}$ machen 0″,0048. Bei einer 10mal größern Reduction würde der Irrthum erst 0″,048 betragen haben, welches unbedeutend ist. Unmöglich können also die unvollkommenen Werthe von a und R, welche man braucht, einen nachtheiligen Einfluß bei der Anwendung der Methode der Sehnen haben.

Auflösung aller geodätischen Aufgaben durch ganz genaue Formeln.

117) Die Formeln in (112) geben die Auflösung der geodätischen Aufgaben bis auf Größen dritter Ordnung für diejenigen Fälle, wo die Entfernung der beiden in Betracht kommenden Puncte, als eine Größe von der Ordnung e^2 angesehen werden darf, welches letztere für alle Entfernungen unter 9 Stunden als wahr anzunehmen ist, wie (108) gezeigt wurde. In (75) bis) haben wir berechnet, wie weit es erlaubt sei, die Glieder 3ter Ordnung, in der Unterstellung, daß die Erde die Gestalt einer Kugel habe, zu vernachläßigen. Allein die Glieder 3ter Ordnung, welche in den Formeln aus (112) weggelassen wurden, sind nicht nur jene, deren Betrag in (75) bis) geschätzt ist, sondern auch noch andere, welche von der Excentricität herrühren. Wir können daher nicht eher bestimmen, wie groß die Seiten der geodätischen Dreiecke seyn dürfen, damit die Formeln aus (112) keine bedeutende Unrichtigkeit enthalten, bis wir diejenigen Aufgaben, welche dort aufgelöst sind, mit Inbegriff der Glieder 3ter Ordnung von Neuem gelöst haben, wo wir dann den größten Betrag dieser Glieder festsetzen, und über die Brauchbarkeit der Formeln von Delambre entscheiden können. Uebrigens sind diese Formeln, wie gesagt, nur für solche Aufgaben passend, wo die geodätische Linie von der Ordnung e^2 ist, und wir wissen aus allem Vorhergehenden noch nicht, wie man in dem Falle, wo die geodätische Linie sehr groß wäre, die elliptische Form der Erde beachten könnte. —

Diese Betrachtungen veranlassen uns, die Auflösung sämmtlicher geodätischen Aufgaben ganz von Neuem vorzunehmen, wie folgt:

Fig. XXXIV. ist P der Nordpol, PD die Erdachse, PA, PM sind zwei Meridiane; AM eine geodätische Linie, welche in A auf dem Meridiane PA senkrecht steht. MO und DA sind die Verticalen von M und A; MT und AI stehen auf PD senkrecht; Mn ist ein unendlich kleiner Bogen des Parallelkreises von M, ln ein eben solcher Bogen des Meridians von n. CFE ist die Ebene des Equators, MR steht auf CF, und RK auf CE senkrecht.

Digitized by Google

Die Gleichung des Erde-Ellipsoides zu finden.

Man nehme C zum Anfangspuncte der Coordinaten, CP zur Achse der z, CE zur Achse der x, und eine in C auf der Ebene PCE senkrecht stehende Linie zur Achse der y an.

Die Gleichung irgend eines Ellipsoides ist $x^2 + ny^2 + pz^2 = q$; aber das gegenwärtige wird von jeder Ebene, welche mit der Ebene der xy parallel ist, in einem Kreise geschnitten; also ist $n = 1$. Die Gleichung wird demnach $x^2 + y^2 + pz^2 = q$. Schneidet man dieses Ellipsoid durch die Ebene der xz, so ist der Durchschnitt eine Ellipse, deren Gleichung $x^2 + pz^2 = q$ ist; aber wir nannten früher die kleine Achse dieser Ellipse $2b$ und die große $2a$; die Gleichung derselben muß also auch $x^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = a^2$ seyn; folglich ist $p = \frac{a^2}{b^2}$, $q = a^2$ und die Gleichung des Ellipsoides wird: $x^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = a^2$.

Es seien $MT = u$, $CT = t$ und der Winkel, den die Ebene PCF, PCE mit einander machen, nämlich $ECF = \phi$. Da nun jeder Punct, durch die ihm zugehörigen u, t und ϕ, bestimmt ist, so können diese Größen gleich Coordinaten des Punctes betrachtet, und statt x, y, z in Rechnung gebracht werden. Es ist aber offenbar $RK = y$ und $CK = x$; folglich $y = CR \cdot \sin\phi = u \sin\phi$ und $x = u \cos\phi$, auch $z = t$. Durch die Substitution dieser Werthe wird die Gleichung des Ellipsoides $u^2 + \frac{a^2 t^2}{b^2} = a^2$, welche zeigt, daß ϕ von u und t unabhängig ist.

118) Die Gleichung der geodätischen Linie zu finden.

Das Differential eines Bogens der geodätischen Linie sei dS, so ist $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; aber $dx = du \cos\phi - u \sin\phi\, d\phi$

$dy = du \sin\phi + u \cos\phi\, d\phi$

$dz = dt$. Hieraus findet man leicht

$dS^2 = du^2 + u^2 d\phi^2 + dt^2$, und $dS = \sqrt{du^2 + u^2 d\phi^2 + dt^2}$.

Deuten wir durch ein vorgesetztes δ die Variation einer Größe an, so muß, wenn S die kürzeste Linie seyn soll, welche auf dem Ellipsoide zwischen zwei gegebenen Puncten gezogen werden kann, $\delta \int dS = 0$ seyn. Aber nach den Regeln der Variationsrechnung ist $\delta \int dS = \int \delta dS$ und $\delta dS = \frac{du \cdot (\delta . du)}{dS} + \frac{u \cdot \delta u \cdot d\phi^2}{dS} + \frac{u^2 d\phi (\delta . d\phi)}{dS} + \frac{dt \cdot (\delta . dt)}{dS}$.

Digitized by Google

Nun sind $\partial . du = d . \partial u$, $\partial . d\varphi = d . \partial \varphi$, $\partial . dt = d . \partial t$, also

$$\int \partial . dS = \int \frac{du . (d . \partial u)}{dS} + \int \frac{u . \partial u . d\varphi^2}{dS} + \int \frac{u^2 . d\varphi . (d . \partial \varphi)}{dS} + \int \frac{dt . d . \partial t}{dS}.$$

Integrirt man den 1ten, 3ten und 4ten Theil dieser Größe nach der Formel $\int m dn = mn - \int n dm$, und nimmt dS ein für allemal als unabhängige veränderliche Größe an, so ist:

$$\int \partial . dS = \frac{du . \partial u}{dS} - \int \frac{d^2 u . \partial u}{dS} + \int \frac{u d\varphi^2}{dS} . \partial u$$

$$+ \frac{u^2 d\varphi . \partial \varphi}{dS} + \frac{dt}{dS} . \partial t - \int \frac{d . (u^2 d\varphi)}{dS} . \partial \varphi - \int \frac{d^2 t}{dS} . \partial t.$$

Soll dieses Integral innerhalb bestimmter Puncte genommen $= o$ seyn, so muß die Größe, welche noch unter dem Zeichen $\int$ steht, für sich $= o$ seyn. Da nun φ von u und t, und folglich $\partial \varphi$ von ∂u und ∂t unabhängig ist, so muß derjenige Theil, wo $\partial \varphi$ ist, besonders Null seyn, woher man $d . \left(\frac{u^2 d\varphi}{dS}\right) = o$ oder $\frac{u^2 d\varphi}{dS} = \text{const.}$ erhält. Auf der geodätischen Linie ist also $u^2 d\varphi = c . dS$. Diese Gleichung, und die $u^2 + \frac{a^2}{b^2} t^2 = a^2$, sind hinreichend, um die geodätische Linie zu bestimmen, nur muß die Gleichung $u^2 d\varphi = c . dS$ noch integrirt und der Werth von c bestimmt werden.

Ehe wir dieses thun, wollen wir zeigen, wie man dieselbe Differentialgleichung ohne Hülfe der Variationsrechnung finden kann.

118) bis) Die geodätische Linie hat, wie wir früher bewiesen (102) 8), die Eigenschaft, daß die Ebene, welche durch zwei auf einander folgende Elemente derselben geht, zugleich eine Normalebene des Ellipsoides ist.

Nimmt man nun erstens die Gleichung einer Ebene, welche durch zwei auf einander folgende Elemente einer auf dem Ellipsoide gezeichneten krummen Linie geht; dann die Gleichung einer an das Ellipsoid tangenten Ebene, und drückt aus, daß diese beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, so erhält man eine Beziehung zwischen x, y, z, oder u, t, φ, welche den Puncten einer geodätischen Linie zukömmt, und daher eine Gleichung derselben ist.

x, y. z, seien die Coordinaten eines Punctes der geodätischen Linie, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, die des nächsten Punctes, und der darauf folgende hat die Coordinaten:

Digitized by Google

$x+dx+d(x+dx)$, $y+dy+d(y+dy)$, $z+dz+d(z+dz)$ oder $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$.

Durch dieſe drei Puncte ſoll eine Ebene gehen; die Coordinaten der Puncte müſſen dann in die Gleichung der Ebene paſſen. Dieſe Gleichung ſei $X+AY+BZ=D$, ſo muß 1) $x+Ay+Bz=D$, 2) $x+dx+A(y+dy)+B(z+dz)=D$ und 3) $x+2dx+d^2x+$ $+A(y+2dy+d^2y)+B(z+2dz+d^2z)=D$ ſeyn. Zieht man 1) von 2) ab, ſo iſt ſtatt dieſer: $dx+Ady+Bdz=o$, und wenn man das Doppelte der letzteren Gleichung zu 1) addirt, und dieſe Summe von 3) abzieht, ſo iſt $d^2x+Ad^2y+Bd^2z=o$. Man hat alſo die drei Gleichungen: $x+Ay+Bz=D$

$$dx+Ady+Bdz=o$$

$$d^2x+Ad^2y+Bd^2z=o, \text{ woraus man}$$

$$A=\frac{dx.d^2z-dz.d^2x}{dz.d^2y-dy.d^2z},\quad B=\frac{dy.d^2x-dx.d^2y}{dz.d^2y-dy.d^2z} \text{ findet.}$$

Dieſe Gleichung einer tangenten Ebene an das Ellipſoid iſt, wie man leicht findet: $X+Y.\frac{y}{x}+\frac{a^2z}{b^2x}.Z=\text{const.}$; ſoll dieſe auf $X+AY+BZ=D$ ſenkrecht ſtehen, ſo muß $1+\frac{A.y}{x}+B.\frac{a^2z}{b^2x}=o$ ſeyn; dieſes wird nach Wegſchaffung aller Nenner:

$b^2x(dz.d^2y-dy.d^2z)+b^2y(dx\,d^2z-dz\,d^2x)+a^2z(dy\,d^2x-dx\,d^2y)=o$,

welche die Gleichung der geodätiſchen Linie iſt.

Wir ſetzen nun anſtatt x, y, z, die Werthe $u\cos\phi$, $u\sin\phi$, t, und für dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, die Größen, welche man durch die Differentiirung der Werthe von x, y, z, erhält. Dann findet man nach einer etwas weitläufigen aber leichten Rechnung für die Gleichung der geodätiſchen Linie:

$b^2u(ud^2\phi dt+2du\,d\phi\,dt-ud\phi\,d^2t)+a^2t(-2du^2d\phi-ud\,du\,d^2\phi+ud\phi d^2u-u^2d\phi^3)=o$.

Nun iſt $b^2u^2+a^2t^2=a^2$; alſo $b^2u\,du+a^2t\,dt=o$, woher $b^2u=\frac{-a^2t\,dt}{du}$.

Subſtituirt man dieſen Werth und hebt den Factor a^2t weg, ſo bleibt nach Wegſchaffung des Nenners du:

$-ud^2\phi dt^2-2du\,d\phi\,dt^2+ud\phi d^2t\,dt-2du^3d\phi-ud\,du^2d^2\phi+ud\phi\,du\,d^2u-u^2d\phi^3\,du=o$.

Soll nun S die unabhängige veränderliche Größe ſeyn, ſo muß man $d^2S=o$ ſetzen, welches die Bedingung $dt.d^2t+du\,d^2u+u\,du\,d\phi^2+u^2d\phi d^2\phi=o$ giebt; multiplizirt

Digitized by Google

man dieſe mit $u\,d\varphi$ und zieht das Product von der vorigen Gleichung ab, ſo erhält man:

$$-u\,d^2\varphi\,dt^2 - 2\,du\,d\varphi\,dt^2 - 2\,du^3\,d\varphi - u\,du^2\,d^2\varphi - 2u^2\,d\varphi^3\,du - u^3\,d\varphi^2\,d^2\varphi = 0.$$

Dieſe iſt die nämliche wie

$$-dt^2(u\,d^2\varphi + 2\,du\,d\varphi) - du^2(2\,du\,d\varphi + u\,d^2\varphi) - u^2\,d\varphi^2(2\,du\,d\varphi + u\,d^2\varphi) = 0$$

oder $(u\,d^2\varphi + 2\,du\,d\varphi)(dt^2 + du^2 + u^2\,d\varphi^2) = 0$ oder $(u\,d^2\varphi + 2\,du\,d\varphi)\,dS^2 = 0$.

Dieſe erfodert, daß $u\,d^2\varphi + 2\,du\,d\varphi = 0$ ſei; multiplicirt man mit u, ſo iſt:

$u^2\,d^2\varphi + 2\,u\,du\,d\varphi = 0$ oder $d(u^2\,d\varphi) = 0$, welche wie vorhin $u^2\,d\varphi = c\,dS$ giebt.

119) Die Conſtante c beſtimmt man durch die Betrachtung des Elementardreieckes Mnl; in demſelben iſt $Mn = u\,d\varphi$, weil $MTn = d\varphi$ iſt; Ml iſt dS und

$\frac{Mn}{Ml} = \cos nMl = \sin AMP$ da Mn auf MP ſenkrecht ſteht; es iſt alſo: $\frac{u\,d\varphi}{dS} = \sin AMP$,

mithin $\frac{u^2\,d\varphi}{dS} = u\sin AMP = c$.

Die geodätiſche Linie hat alſo die Eigenſchaft, daß auf derſelben überall $u\sin AMP$ das nämliche iſt.

Im Puncte A iſt der Winkel $AMP = 90°$, alſo $c = AI \cdot \sin 90° = AI$.

Die Gleichungen $u^2\,d\varphi = c\,dS$ und $dS^2 = du^2 + dt^2 + u^2\,d\varphi^2$ können dienen um $d\varphi$ und dS in Function von du und dt zu beſtimmen. Es iſt nämlich

$\frac{u^4\,d\varphi^2}{c^2} = dS^2 = du^2 + dt^2 + u^2\,d\varphi^2$, alſo: $(u^4 - c^2u^2)\,d\varphi^2 = c^2(du^2 + dt^2)$, woher

$$d\varphi = \pm\frac{c}{u}\sqrt{\frac{du^2 + dt^2}{u^2 - c^2}} \quad (1) \text{ und folglich } dS = \frac{u^2\,d\varphi}{c} = u\sqrt{\frac{du^2 + dt^2}{u^2 - c^2}} \quad (2).$$

Durch die Gleichung $u^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - t^2)$ könnte man u oder t aus den Gleichungen (1), (2) wegſchaffen, und ſie ſodann integriren.

120) Unſere Aufgabe beſteht aber darin, Beziehungen zwiſchen folgenden Größen zu finden: die Breite von A, die von M, der Azimuth AMP, der Winkel MPA und die Länge MA. Die Gleichungen (1), (2), können zur Erreichung dieſes Zweckes nur dann dienen, wenn man für u und t ihre Werthe in Function der vorhergehenden Größen ſubſtituirt.

Die Breite von A heiße l, die von M, λ; der Azimuth AMP ſei V; MPA iſt unſer φ.

Digitized by Google

Nun ist $\text{tang}\,\lambda = \frac{a^2 t}{b^2 u}$ und $a^2 t^2 + b^2 u^2 = a^2 b^2$; mithin $\text{tang}^2\lambda = \frac{a^4 t^2}{b^4 u^2} =$

$= \frac{a^2 t^2}{b^4 - b^2 t^2}$, woher $b^4 \text{tang}^2\lambda = t^2 (a^2 + b^2 \text{tang}^2\lambda)$; sucht man einen Winkel λ', so, daß $b^2 \text{tang}^2\lambda = a^2 \text{tang}^2\lambda'$ oder $\text{tang}\lambda' = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,\lambda$ ist, so ist $b^2 a^2 \text{tang}^2\lambda' = t^2 a^2 (1 + \text{tang}^2\lambda')$, woher $t = b \sin\lambda'$ und $u = a\cos\lambda'$, $dt = b\cos\lambda\, d\lambda'$, $du = -a\sin\lambda' d\lambda'$. Die Gleichungen (1), (2) werden durch die Substitution dieser Werthe:

$$dS = \pm a\cos\lambda' d\lambda' \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{a^2\cos^2\lambda' - c^2}} \text{ und}$$

$$d\varphi = \pm \frac{c\, d\lambda'}{a\cos\lambda'} \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{a^2\cos^2\lambda' - c^2}};$$

λ' nimmt ab, wenn φ und S wachsen, weil wir vom Puncte A her zählen; $d\varphi$ und dS müssen also das entgegengesetzte Zeichen von $d\lambda'$ haben, daher:

$$dS = -a\cos\lambda' . d\lambda' \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{a^2\cos^2\lambda' - c^2}}$$

$$d\varphi = -\frac{c\, d\lambda'}{a\cos\lambda'} \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{a^2\cos^2\lambda' - c^2}}$$

c ist dem u des Punctes A gleich; nimmt man daher $\text{tang}\,l' = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,l$, so ist $c = a\cos l'$ und folglich

$$dS = -\cos\lambda' d\lambda' \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{\cos^2\lambda' - \cos^2 l'}},\quad d\varphi = \frac{-\cos l' . d\lambda'}{a\cos\lambda'} \sqrt{\frac{a^2\sin^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{\cos^2\lambda' - \cos^2 l'}}.$$

121) Fig. XXXV. bedeuten die nämlichen Buchstaben Dasselbe wie Fig. XXXIV.; man beschreibe aus C mit dem Radius b eine Kugelfläche, so wird man in der Ebene PCE einen größten Kreisbogen PT erhalten. Nun ziehe man aus A mit CE die Parallellinie AA', und bezeichne so auf der Kugel einen Punct A'; dann wird der Winkel A'CE = l, seyn, wie man leicht finden kann; man ziehe ferner durch A' den größten Kreisbogen A'M' auf PA' senkrecht, und nehme auf demselben einen Punct M', so daß der Winkel M'CS gleich λ' sei. Dann würde das Dreieck PM'A' mit PMA einerlei seyn, wenn die Erde sphärisch wäre; diese Dreiecke können also nur wenig verschieden seyn.

Nennt man daher x den Werth von A'M' in Theilen des Radius, und setzt M'PA' = y, so sind die Unterschiede S − bx und φ − y sehr kleine Größen, und diese wollen wir jetzt berechnen.

Digitized by Google

122) In dem sphärischen und rechtwinkeligen Dreiecke PM'A' ist $\sin\lambda' = \sin l' \cos x$ und $\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos l'}$. Um nun $S - b x$ zu finden, suchen wir zuerst $dS - b\,dx$. Man hat aus (120) $dS = -\cos\lambda' d\lambda' \sqrt{\frac{a^2 \sin^2\lambda' + b^2 \cos^2\lambda'}{\cos^2\lambda' - \cos^2 l'}}$; setzt man $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon$, so ist ε von der nämlichen Ordnung wie früher e^2, und es wird

$$dS = -\cos\lambda' d\lambda' \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\sin^2\lambda' + b^2}{\cos^2\lambda' - \cos^2 l'}} = -b\cos\lambda' d\lambda' \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \sin^2\lambda' + 1}{\sin^2 l' - \sin^2\lambda'}};$$

setzt man für $\sin^2\lambda'$ das gleiche $\sin^2 l' \cos^2 x$, so ist: $dS = -\frac{b\cos\lambda' d\lambda'}{\sin l' \sin x} \sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x}$, und da aus $\sin\lambda' = \sin l' \cos x$, $\cos\lambda' d\lambda' = -\sin l' \sin x\, dx$ wird, so ist:

$dS = b\,dx \sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x}$ und endlich $dS - b\,dx = b\,dx\,(\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x} - 1.)$

Wenn man $\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x}$ nach den Potenzen von ε entwickelt und keine höhere als ε^2 beibehält, so wird:

$dS - b\,dx = b\,dx\,(\frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4 l' \cos^4 x)$; setzt man für $\cos^2 x$ und $\cos^4 x$ die Werthe $\frac{1 + \cos 2x}{2}$ und $\frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$, so erhält man nach geschehener Integrirung:

$$S - bx = bx\,(\tfrac{1}{4}\varepsilon \sin^2 l' - \tfrac{3}{64}\varepsilon^2 \sin^4 l') + b \sin 2x \left\{\tfrac{1}{8}\varepsilon \sin^2 l' - \tfrac{1}{32}\varepsilon^2 \sin^4 l'\right\}$$
$$- b \sin 4x\,(\tfrac{1}{256}\varepsilon^2 \sin^4 l') + \text{const.}$$

Da S und x zugleich o werden, so ist const. = o.

123) Wir suchen nun $\phi - y$ oder $d\phi - dy$.

$\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos l'}$, also: $\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\cos l' \cos^2 x}$, $dy = \frac{\cos^2 y \cdot dx}{\cos l' \cos^2 x}$; nun ist

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y} = \frac{\cos^2 l'}{\cos^2 l' + \operatorname{tang}^2 x} = \frac{\cos^2 l' \cos^2 x}{\cos^2 x \cos^2 l' + \sin^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x \cos^2 l'}{\cos^2 x \cos^2 l' + 1 - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x \cos^2 l'}{1 - \sin^2 l' \cos^2 x}, \text{ also } dy = \frac{\cos l' \cdot dx}{1 - \sin^2 l' \cos^2 x}.$$

Da $d\phi = dS \cdot \frac{\cos l'}{a \cos^2\lambda'}$, so ist $d\phi = \frac{b \cos l' dx}{a(1 - \sin^2 l' \cos^2 x)} \sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x}$.

Mithin $d\phi - dy = \frac{\cos l' \cdot dx}{1 - \sin^2 l' \cos^2 x} \left\{\frac{b}{a}\sqrt{1 + \varepsilon \sin^2 l' \cos^2 x} - 1\right\}$; nun ist

$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \varepsilon$, daher $\frac{a}{b} = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{b}{a} = (1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2$ und

Digitized by Google

$$\sqrt{1+\varepsilon\sin^2 l'\cos^2 x} = 1+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2 l'\cos^2 x - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4 l'\cos^4 x, \text{ also}$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{1+\varepsilon\sin^2 l'\cos^2 x} - 1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2 l'\cos^2 x - \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4 l'\cos^4 x - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2 l'\cos^2 x + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\varepsilon(1-\sin^2 l'\cos^2 x) + \frac{\varepsilon^2}{8}(3-\sin^4 l'\cos^4 x - 2\sin^2 l'\cos^2 x).$$

Dieser Ausdruck ist durch $1-\sin^2 l'\cos^2 x$ genau theilbar, und giebt zum Quotienten $-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{8}(3+\sin^2 l'\cos^2 x)$. Demnach wird:

$d\phi - dy = \cos l'\,dx\left\{-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}\sin^2 l'\cos^2 x\right\}$; setzt man nun noch

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \text{ so wird endlich:}$$

$d\phi - dy = \cos l'.dx\left\{-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2 l'(1+\cos 2x)\right\}$, folglich $\phi - y = -\cos l'.x(\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2) + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2 l'\cos l'(x+\tfrac{1}{2}\sin 2x) + \text{cons.}$ Wenn $x=0$ ist, wird auch $y=0$ und $\phi=0$; also ist const. $=0$.

124) Wir wollen nun die Formel aus (122) umkehren und auf diese Art x in Function von $\frac{S}{b}$, welches wir σ nennen, bestimmen.

Nach (7) hat man, wenn $u = a \pm \varepsilon\phi(u)$ ist,

$$u = a \pm \varepsilon\phi(a) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d(\phi(a))^2}{da} + \ldots\ldots\ldots; \text{ nun ist:}$$

$$\sigma = x + \varepsilon(\tfrac{1}{4}x\sin^2 l' + \tfrac{1}{8}\sin 2x\sin^4 l' - \tfrac{1}{32}\sin 2x.\varepsilon\sin^4 l' - \tfrac{3}{64}\varepsilon\sin^4 l'$$
$$- \tfrac{1}{256}\sin 4x.\varepsilon.\sin^4 l'),$$

woher $x = \sigma - \varepsilon\phi(x)$ und also $x = \sigma - \varepsilon\phi(\sigma) + \frac{\varepsilon^2}{2}d.\frac{(\phi(\sigma))^2}{d\sigma}$. Man setze nun in $\phi(x)$ statt x, σ, so hat man $\phi(\sigma)$.

Um $d.\frac{(\phi(\sigma))^2}{d\sigma}$ zu berechnen, bemerken wir voraus, daß man in dieser Größe nur diejenigen Glieder, welche von ε unabhängig sind, beibehalten muß, indem dieselbe noch mit ε^2 multiplicirt wird. Demnach hat man:

$$(\phi(\sigma))^2 = \tfrac{1}{16}\sigma^2\sin^4 l' + \tfrac{1}{64}\sin^2 2\sigma\sin^4 l' + \tfrac{1}{16}\sigma\sin 2\sigma\sin^4 l'.$$

$$\frac{d(\phi(\sigma))^2}{d\sigma} = \tfrac{1}{8}\sigma\sin^4 l' + \tfrac{1}{32}\sin 4\sigma\sin^4 l' + \tfrac{1}{16}\sin 2\sigma\sin^4 l' + \tfrac{1}{8}\sigma\cos 2\sigma\sin^4 l'.$$

Digitized by Google

Also $x = \sigma\{1 - \frac{1}{4}\varepsilon \sin^2 l' + \frac{7}{64}\varepsilon^2 \sin^4 l'\} + \sin 2\sigma\{-\frac{1}{8}\varepsilon \sin^2 l' + \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin^4 l'\}$
$+ \sigma \cos 2\sigma\{\frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin^4 l'\} + \sin 4\sigma\{\frac{5}{256}\varepsilon^2 \sin^4 l'\}$.

σ ist in Theilen des Radius gegeben; um $\sin 2\sigma$, $\cos 2\sigma$, $\sin 4\sigma$ zu finden, muß man σ in Graden bestimmen, und es hierzu mit $\frac{180}{\pi}$ multipliciren; wenn es klein genug ist, kann man es in Secunden ausdrücken, indem man es durch $\sin 1''$ dividirt; das x, welches man findet, ist auch in Theilen des Radius ausgedrückt; um es in Graden zu finden, multiplicire man es ebenfalls mit $\frac{180}{\pi}$, oder dividire es durch $\sin 1''$, um es in Secunden zu haben.

125) Die Formeln der drei vorhergehenden §§. dienen, um alle Aufgaben, welche man sich über das Dreieck PAM geben will, aufzulösen.

Wir wollen die nothwendigsten durchnehmen.

1, S sind gegeben; man soll λ und φ finden. Die Formeln sind folgende:

1. $\operatorname{tang} l' = \frac{b}{a}\operatorname{tang} l$, oder nach (106) $l - l' = \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{\sin 2l}{\sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\sin 4l}{\sin 1''}\ldots$
2. $x = \sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ aus (124).
3. $\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos l'}$.
4. $\varphi = y - x\cos l'\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ aus (123).
5. $\sin\lambda' = \sin l' \cos x$.
6. $\operatorname{tang}\lambda = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\lambda'$. (Anwendung (271).)

126) φ, λ sind gegeben, S und l zu bestimmen.

Diese Aufgabe wollen wir zuerst so auflösen, daß man nur die Glieder in ε beibehält.

Man hat: $\operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\lambda$, $\sin\lambda' = \sin l' \cos x$, $\varphi = y - \frac{1}{2}\varepsilon x \cos l'$

$$\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} x}{\cos l'},\quad S = bx + \frac{1}{4}b\varepsilon x \sin^2 l' + \frac{1}{8}b\varepsilon \sin 2x \sin^2$$

Aus der ersten Gleichung berechnen wir λ'; nun bleiben noch die unbekannten Größen l', x, y, S.

In dem Dreiecke A'M'P ist $\sin x = \cos\lambda' \sin y$; setzte man hier für y, φ, so erhielte man ein x, welches von dem wahren durch Glieder mit ε verschieden wäre; dieses x heiße ξ,

Digitized by Google

so daß $\sin\xi = \cos\lambda' \sin\varphi$ ist. Nun darf man in $\frac{1}{2}\varepsilon x \cos 1'$ für x, ξ setzen, weil dadurch nur Glieder mit ε^2 weggelassen werden; es wird also $\varphi = y - \frac{1}{2}\varepsilon\xi\cos 1'$. In dem Dreiecke A'M'P ist auch $\cos 1' = \frac{\tang x}{\tang y}$. Da dieser Werth in $\frac{1}{2}\varepsilon\xi\cos 1'$ gesetzt werden soll, so kann man statt desselben $\frac{\tang\xi}{\tang\varphi}$ schreiben; es ist dann $\varphi = y - \frac{1}{2}\varepsilon\xi\frac{\tang\xi}{\tang\varphi}$, woher

$$y = \varphi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi\frac{\tang\xi}{\tang\varphi} \quad (1).$$

Nun kann man x durch $\sin x = \cos\lambda' \sin y$ finden; will man aber x direct, und ohne y zu kennen, haben, so ist $\sin y = \sin\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\xi\frac{\tang\xi\cos\varphi}{\tang\varphi}$, und folglich

$$\sin x = \sin\varphi\cos\lambda' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi\frac{\tang\xi\,.\cos\lambda'.\cos\varphi}{\tang\varphi}, \text{ oder}$$

$$\sin x = \sin\xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi\frac{\tang\xi\,.\cos\lambda'.\cos\varphi}{\tang\varphi}.$$

Es sei $x = \xi + A\varepsilon$, so ist $\sin x = \sin\xi + \varepsilon A \cos\xi$; also

$$A\cos\xi = \tfrac{1}{2}\xi\frac{\tang\xi\cos\lambda'\cos\varphi}{\tang\varphi}, \text{ mithin:}$$

$$x = \xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.\,\xi\,.\frac{\tang\xi\cos\lambda'\cos\varphi}{\cos\xi\tang\varphi} \quad (2).$$

Mit Hülfe von x wird man l' durch $\sin 1' = \frac{\sin\lambda'}{\cos x}$ finden; will man l' haben, ohne x zu kennen, so muß $\cos x$ durch $\cos\xi$ ausgedrückt werden.

Es ist $\cos x = \cos\xi - \varepsilon A\sin\xi$; also $\sin 1' = \frac{\sin\lambda'}{\cos\xi - A\,.\,\varepsilon\,.\sin\xi}$ oder

$$\sin 1' = \frac{\frac{\sin\lambda'}{\cos\xi}}{1 - A\,.\,\varepsilon\,.\,\tang\xi} = \frac{\sin\lambda'}{\cos\xi}\left\{1 + A\,.\,\varepsilon\,.\,\tang\xi\right\} =$$

$$= \frac{\sin\lambda'}{\cos\xi}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\,.\varepsilon\,.\xi\,.\frac{\tang^2\xi\cos\lambda'\cos\varphi}{\cos\xi\tang\varphi}\right\} \quad (3). \quad \text{Endlich ist:}$$

$$S = b\,(x + \tfrac{1}{4}\varepsilon x\sin^2 1' + \tfrac{1}{8}\varepsilon\sin 2x\sin^2 1') \quad (4).$$

ξ erhält man gleich Anfangs in Graden; die Formeln (1) und (2) geben dann y und x ebenfalls in Graden. In der Formel (3) muß der Werth von $\sin 1'$ in Theilen des Radius erhalten werden; man muß daher innerhalb der Parenthese, ξ, da wo es direct in Rechnung gebracht ist, in Theilen des Radius setzen. Die Formel (4) giebt S in

Digitized by Google

Längenmaaß; nur muß innerhalb der Parentheſe, x, da wo es direct in Rechnung gebracht iſt, in Theilen des Radius ausgedrückt werden.

127) Will man in der vorigen Aufgabe die Glieder mit ε^2 beibehalten, ſo nenne man den vorhin gefundenen Werth von x, ξ', und den von l', l''; nehme dann die Formel aus (123).

$$\varphi = y - \tfrac{1}{2}\varepsilon . x . \cos l' + \varepsilon^2 \{\tfrac{3}{8} x \cos l' + \tfrac{1}{16}\sin^2 l' \cos l' (x + \tfrac{1}{2}\sin 2x)\}$$

Da nun x von ξ' und l' von l'' nur durch Glieder zweiter Ordnung verſchieden ſind, ſo darf man in $\frac{1}{2}\varepsilon . \cos l' . x$, für x, ξ' und für l', l'' ſchreiben; ferner darf man auch in den Theil, welcher mit ε^2 multiplicirt iſt, für x, ξ und für l' den Werth, welchen man aus $\cos l' = \frac{\tang \xi}{\tang \varphi}$ findet, ſetzen. Man erhält alſo auf dieſe Art leicht den Werth von y; dann x aus $\sin x = \cos \lambda' \sin y$ und l' aus $\sin l' = \frac{\sin \lambda'}{\cos x}$; endlich S aus der Formel in (122).

128) Wir können jetzt folgende geodätiſche Aufgaben auflöſen.

1. Wenn (Fig. XXXII.) die Breite des Punctes A, und die Entfernung des Punctes M von dem Meridiane und der Perpendiculäre von A, nämlich MK = S und AK gegeben ſind; die Breite von M und der Längenunterſchied der Puncte A und M zu finden. Zuerſt muß man die Breite von K ſuchen; in (114) findet ſich dafür eine Formel, welche ſo lange gilt, als AK klein iſt; hier wollen wir aber die Aufgabe in ihrer größten Allgemeinheit auflöſen.

Nennt man AK = T und L, l die Breiten ſeiner Endpuncte A, K, ſo findet man nach (104), wenn man für A, B, C ihre Werthe ſetzt:

$$T = a(l-L) - a\{\tfrac{1}{4}(l-L) + \tfrac{3}{4}\sin(l-L)\cos(l+L)\}e^2 + ae^4\{-\tfrac{3}{64}(l-L) - \tfrac{3}{16}\sin(l-L)\cos(l+L) + \tfrac{15}{128}\sin 2(l-L)\cos 2(l+L)\} \quad (1),$$

wo $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ iſt.

Dieſe Formel giebt T, wenn l, L bekannt ſind; aber hier ſind T und L bekannt und l — L, welches wir Δ nennen, ſoll gefunden werden.

Wir wollen dieſe Größe zuerſt ſuchen, wenn wir die Glieder mit e^4 weglaſſen. Dann iſt $T = a\Delta - ae^2\{\frac{1}{4}\Delta + \frac{3}{4}\sin\Delta\cos(2L+\Delta)\}$; da nun Δ und $\frac{T}{a}$ nur durch Glieder mit e^2 verſchieden ſind, ſo kann man

Digitized by Google

$\frac{T}{a} = \Delta - e^2 \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{T}{a} + \frac{3}{4} \sin \frac{T}{a} \cos \left(2L + \frac{T}{a} \right) \right\}$ setzen, woraus man

(2)... $\Delta = \frac{T}{a} + e^2 \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{T}{a} + \frac{3}{4} \sin \frac{T}{a} \cos \left(2L + \frac{T}{a} \right) \right\}$ zieht. $\frac{T}{a}$ muß hier in Graden ausgedrückt seyn, welches geschieht, wenn man es mit $\frac{180}{\pi}$ multiplizirt. (Anwendung (267).)

Will man die Glieder mit e^4 beibehalten, so nenne man den eben gefundenen Werth von Δ, Δ', dann sind Δ' und Δ nur durch Glieder mit e^4 verschieden; man darf also in der Formel (1), im Coeffizienten von e^2, für Δ, Δ', und in dem Coeffizienten von e^4, für Δ, $\frac{T}{a}$ schreiben. Man erhält also leicht einen Werth von Δ, welcher bis auf Glieder mit e^6 genau ist. Hat man nun so l gefunden, so berechnet man die noch unbekannten φ und λ aus den Formeln (125), da S gegeben ist. (Anwendung (271).)

2. Wenn die Breite eines Punctes A, (Fig. XXXII.) der Längenunterschied desselben und eines andern M, und die Breite von M gegeben sind; die Entfernungen des Punctes M von dem Meridiane und der Perpendiculäre von A zu finden.

Nach (126) und (127) finden wir MK, oder S, und l; sodann aus l und nach der Formel (1) in dem gegenwärtigen §. die Entfernung AK. —

Die beiden vorhergehenden Aufgaben sind die nämlichen, welche wir in (99) und später in (114), (115) mit allerlei Einschränkungen aufgelöst haben. Die Auflösung, welche wir hier geben, paßt auf alle Fälle, und ist so genau, als die Hypothese, welche wir über die Gestalt der Erde gemacht haben, und der Gebrauch der Logarithmen-Tafeln es erlauben. (Anwendung 247).

129) Wir wollen uns nun mit der Auflösung eines Dreieckes ABC Fig. XXXV. bis beschäftigen, welches durch zwei Meridiane AB, AC und eine geodätische Linie BC gebildet wird, wo wir unterstellen, daß BC klein und von der Ordnung ε sei.

Man verlängere den Bogen BC bis zu dem Puncte D, wo der Meridian auf demselben senkrecht steht.

Es seien λ', λ, l die Breiten von B, C, D; ψ', ψ, l' seien solche Winkel, daß $\operatorname{tang} \psi' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \lambda'$, $\operatorname{tang} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \lambda$, $\operatorname{tang} l' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} l$. Die Winkel ACD, ABD heißen V, V', die CAD, BAD, φ, φ'; BC nennen wir S.

Digitized by Google

Nun nehme man auf der Kugel, deren Radius b ist, vom Nordpole A' her, auf einem Meridiane, das Stück $A'D' = 90° - l'$; ziehe dann den Bogen eines größten Kreises B'C'D' auf A'D' senkrecht; nehme auf diesem Bogen die Puncte B' und C' so, daß $A'B' = 90° - \psi'$, $A'C' = 90° - \psi$ ist. Wir behaupten dann, daß die Winkel z, z' denen V, V' gleich seyn werden; denn in dem Dreiecke A'C'D' ist $\frac{\sin 90°}{\sin z} = \frac{\sin(90° - \psi)}{\sin(90° - l')}$ oder $\sin z \cos\psi = \cos l'$, und ebenso ist $\sin z' \cos\psi' = \cos l'$. Es ist aber in B, $u = a\cos\psi'$, in C, $u = a\cos\psi$, in D, $u = a\cos l'$ (120); und weil auf der geodätischen Linie $u \sin V$ überall das nämliche ist (119), so muß $a \sin V \cos\psi = a\cos l' \sin 90°$, oder $\sin V \cos\psi = \cos l'$, und ebenso $\sin V' \cos\psi' = \cos l'$ seyn. Vergleicht man diese Gleichungen mit denen, worin z und z' vorkommen, so sieht man, daß $z = V$ und $z' = V'$ ist.

Wir nehmen uns nun vor, durch λ, S, V, die Größen λ', $\varphi' - \varphi$ und V' zu bestimmen. Nennen wir B'C', in Theilen von b ausgedrückt, ξ, so können wir in dem sphärischen Dreiecke B'A'C', durch ψ, V und ξ, die ψ', V' und $y' - y$, berechnen. Hierzu brauchen wir die Formeln aus (93), wo wir $\frac{S}{R} = \xi$, $\lambda' = \psi'$, $\lambda = \psi$, $L' = y'$, $L = y$, und, wegen der Stellung der Winkel V, V' in unserer Figur, $V' = 180° - V'$, $V = 180° - V$ setzen müssen. Die Formeln werden dann:

$$\psi' = \psi - \xi \cos V - \tfrac{1}{2}\xi^2 \sin^2 V \operatorname{tang}\psi + \tfrac{1}{4}\xi^3 \sin 2V \sin V \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi\right)$$

$$y' - y = \frac{\sin V}{\cos\psi}\left\{\xi - \operatorname{tang}\psi \cos V \cdot \xi^2 + \xi^3\left(\tfrac{1}{3}\cos^2 V + \operatorname{tang}^2\psi\left(1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 V\right)\right)\right\}$$

$$V' - V = -\xi \sin V \operatorname{tang}\psi + \xi^2 \sin V \cos V \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\psi\right) - \xi^3 \operatorname{tang}\psi \sin V \left(\tfrac{5}{6} - \sin^2 V\right) - \xi^3 \operatorname{tang}^3\psi \sin V \left(1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 V\right).$$

130) Kann man nun noch in ξ in Function von $\frac{S}{b} = \sigma$ und $\varphi' - \varphi$ in Function von $y' - y$ bestimmen, so ist unsere Aufgabe vollkommen gelöst. Da in unserer Figur, C, C', D, D' unveränderliche Puncte sind, so sind φ, y, V, CD, C'D' constante Größen; deswegen ist $d\varphi' = d(\varphi' - \varphi)$, $dy' = d(y' - y)$, $dS = d(BD)$; und nennt man C'D' in Theilen von b, μ, so ist $d\xi = d(\mu + \xi)$.

Aber nach (120) ist offenbar $d\varphi' = d(\varphi' - \varphi) = -\frac{\cos l' \cdot d\psi'}{a\cos\psi'}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\psi' + b^2\cos^2\psi'}{\cos^2\psi' - \cos^2 l'}}$ und $d(BD) = dS = -d\psi' \cos\psi' \sqrt{\frac{a^2\sin^2\psi' + b^2\cos^2\psi'}{\cos^2\psi' - \cos^2 l'}}$; aus den Dreiecken

Digitized by Google

$A'D'B'$, $A'D'C'$ wird ferner $\sin\psi' = \sin l' \cos(\mu+\xi)$, $\sin\psi = \sin l' \cos\mu$,

$\operatorname{tang} y' = \frac{\operatorname{tang}(\mu+\xi)}{\cos l'}$.

Nun ſuchen wir $dS - b\,.\,d\xi$ und $d.(\phi' - \phi) - d.(y' - y)$ oder $d\phi' - dy'$.

131) Die Rechnung, welche wir zu dieſem Zwecke zu machen hätten, iſt, wie man ſogleich ſieht, genau die nämliche, wie in (122) und (123), nur daß hier $(\mu+\xi)$ und dort x ſteht.

Wir erhalten demnach:

$$dS - b\,d\xi = b\,d\xi\,(\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 l' \cos^2(\mu+\xi) - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4 l' \cos^4(\mu+\xi).)$$

Da wir nun ξ von der Ordnung ε unterſtellt haben, und keine höhere als die dritte beibehalten wollen, ſo können wir $\cos(\mu+\xi) = \cos\mu - \xi\sin\mu$, und $\cos^2(\mu+\xi) = \cos^2\mu - 2\xi\cos\mu\sin\mu$ ſetzen, weil $\cos^2(\mu+\xi)$ mit ε und nachher noch mit ξ multiplicirt wird. Aus einer ähnlichen Urſache kann man für $\cos^4(\mu+\xi)$ blos $\cos^4\mu$ ſchreiben. Hierdurch wird:

$dS - b\,d\xi = b\,d\xi\,(\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 l' \cos^2\mu - \varepsilon\xi \sin^2 l' \cos\mu \sin\mu - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4 l' \cos^4\mu)$, woher

$S = b\xi\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 l' \cos^2\mu - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4 l' \cos^4\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi \sin^2 l' \cos\mu \sin\mu) + \text{const.}$; die Conſtante iſt o.

Ehe wir dieſe Formel umkehren, um ξ in Function von $\frac{S}{b}$ zu beſtimmen, wollen wir für l' und μ ihre Werthe in Function der gegebenen Dinge ψ, V ſubſtituiren; aus (130) hat man $\sin l' \cos\mu = \sin\psi$, und in dem Dreiecke $A'C'D'$ iſt $\sin l' \sin\mu = \cos\psi \cos V$ (54).

Setzt man nun in die obige Formel für $\sin l' \cos\mu$ und $\sin l' \sin\mu$ ihre Werthe, ſo wird:

$S = b\xi\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi - \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi \sin\psi \cos\psi \cos V)$, oder wenn man $\frac{S}{b} = \sigma$ ſetzt:

$$\sigma = \xi\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi) - \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi^2 \sin\psi \cos\psi \cos V. \quad (1)$$

Um dieſe Formel umzukehren, bemerken wir, daß man in das letzte Glied für ξ, σ ſchreiben kann, woher:

$\sigma + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \sin\psi \cos\psi \cos V = \xi\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi)$, wird; alſo:

$\xi = (\sigma + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \sin\psi \cos\psi \cos V)(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi)^{-1} =$

$= (\sigma + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \sin\psi \cos\psi \cos V)(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi)$,

und nach geſchehener Multiplication:

$$\xi = \sigma\,(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \sin\psi \cos\psi \cos V. \quad (2)$$

Digitized by Google

132) Wir suchen nun $d\phi' - dy'$. Mit Anwendung von (123) und der Bemerkung zu Anfang des vorigen Paragraphen ist:

$d\phi' - dy' = \cos l' \, d(\mu + \xi) \{ -\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^2 l' \cos^2(\mu + \xi) \}$ und da $d(\mu+\xi) = d\xi$ ist, und man hier $\cos^2(\mu + \xi) = \cos^2\mu$ setzen kann, so ist:

$d\phi' - dy' = \cos l' \, . \, d\xi \{ -\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^2 l' \cos^2\mu \}$. Nun ist $\cos l' = \sin V \cos\psi$ und $\sin^2 l' \cos^2\mu = \sin^2\psi$, woher $d\phi' - dy' = \frac{1}{2}\varepsilon \, d\xi \sin V \cos\psi \{ -1 + \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon \sin^2\psi \}$; setzt man für $d\phi' - dy'$, $d(\phi' - \phi) - d(y' - y)$ und integrirt, so wird:

$(\phi' - \phi) - (y' - y) = -\frac{1}{2}\varepsilon\xi \sin V \cos\psi \{ 1 - \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon \sin^2\psi \} + \text{const.}$ Die Constante ist o, weil, wo $\xi = o$ ist, $\phi' = \phi$ und $y' = y$ wird; man hat also:

$$\phi' - \phi = (y' - y) - \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi \sin V \cos\psi \{ 1 - \tfrac{3}{4}\varepsilon - \tfrac{1}{4}\varepsilon \sin^2\psi \}.$$

Nimmt man nun die Formeln aus (129), und setzt in diese für ξ seinen Werth in Function von σ (131), so wird $\xi^2 = \sigma^2(1 - \varepsilon \sin^2\psi)$, $\xi^3 = \sigma^3$, und man erhält:

$$\begin{aligned}
\psi' = \psi &- \sigma \cos V (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi) \\
&- \tfrac{1}{2}\sigma^2 \sin^2 V \operatorname{tang}\psi (1 - \varepsilon \sin^2\psi) \\
&- \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \cos^2 V \sin\psi \cos\psi + \tfrac{1}{4}\sigma^3 \sin 2V \sin V (\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi) \ldots (1), \\
V' = V &- \sigma \sin V \operatorname{tang}\psi (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4\psi) \\
&+ \sigma^2 \sin V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\psi - \varepsilon \operatorname{tang}^2\psi) \\
&- \sigma^3 (\tfrac{5}{6} - \sin^2 V) \operatorname{tang}\psi \sin V \ldots (2), \\
&- \sigma^3 (1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 V) \operatorname{tang}^3\psi \sin V, \\
\phi' - \phi = &\frac{\sigma \sin V}{\cos\psi} (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2) \\
&- \sigma^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi} (1 - \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos^2\psi) \\
&+ \sigma^3 \{ \tfrac{1}{3}\cos^2 V + \operatorname{tang}^2\psi (1 - \tfrac{4}{3}\sin^2 V) \} \frac{\sin V}{\cos\psi} \ldots (3).
\end{aligned}$$

Man hätte auch V' durch die Gleichung $\sin V' \cos\psi' = \sin V \cos\psi$ finden können.

Es versteht sich von selbst, daß die Werthe von $\psi' - \psi$, $V' - V$, $\phi' - \phi$, noch durch $\sin 1''$ dividirt werden müssen. (Anwendung (223).)

133) Die Formeln, welche wir so eben gefunden haben, dienen, um die Aufgabe, die in der Nummer (112) mit Ausschluß der Größen dritter Ordnung aufgelöst ist, bis

Digitized by Google

auf die Größen vierter Ordnung genau aufzulösen; man muß bemerken, daß $\text{tang}\,\psi' = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,\lambda'$, $\text{tang}\,\psi = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,\lambda$ und $\sigma = \frac{S}{b}$ ist, und daß eine südliche Breite negativ genommen werden muß.

Der wahre Azimuth und der wahre Längenunterschied sind hier von den sphärisch berechneten schon durch Glieder zweiter Ordnung verschieden, und in den Formeln der vorigen Abtheilung (112) ist dieser Unterschied nur dritter Ordnung; dieses kömmt daher, weil hier der Radius der Kugel b und dort $\frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$ ist. Wenn man in die Formeln aus (132) ψ in Function von λ, und ψ' in Function von λ' substituirt, und für ε seinen Werth in Function von e^2, nämlich $e^2 + e^4$ setzt; andererseits in die Formeln aus (112) für R den Werth $\frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$ oder $\frac{b}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$ schreibt; dann alles nach den Potenzen von e^2 entwickelt; auch noch bemerkt, daß L' in (112) das λ' von jetzt ist, so wird man die Uebereinstimmung der Formeln aus (112) mit denen des vorigen §. in den Gliedern 1ter und 2ter Ordnung wahrnehmen.

133) bis) Wir wollen nun versuchen anzugeben, wie groß σ seyn könne, ehe man in der Nummer (132) die Glieder 3ter Ordnung beachten müsse. Diese Glieder betragen in der Formel (1):

$$-\tfrac{3}{8}\sigma\varepsilon^2\cos V\sin^4\psi + \tfrac{1}{2}\sigma^2\varepsilon\sin^2 V\,\text{tang}\,\psi\sin^2\psi - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2\cos^2 V\sin\psi\cos\psi$$
$$+\tfrac{1}{4}\sigma^3\sin 2V\sin V\,(\tfrac{1}{3}+\text{tang}^2\psi)$$

Unterstellen wir hier $\psi = 45°$, weil diese Bedingung für unsere Gegenden immer beinahe erfüllt ist, so wird die obige Größe:

$$-\tfrac{3}{32}\sigma\varepsilon^2\cos V - \tfrac{1}{4}\sigma^2\varepsilon\cos 2V + \tfrac{1}{3}\sigma^3\sin 2V\sin V.$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß von diesen drei Gliedern immer nur zwei das nämliche Zeichen haben können, und zwar entweder die beiden ersten, oder das zweite und dritte. Man wird also gewiß seyn, daß der gesammte absolute Werth der Glieder 3ter Ordnung in der Formel (1) immer entweder kleiner als $\frac{3}{32}\sigma\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\sigma^2\varepsilon$ oder kleiner als $\frac{1}{3}\sigma^3 + \frac{1}{4}\sigma^2\varepsilon$ ist.

Setzen wir also $\frac{3}{32}\sigma\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\sigma^2\varepsilon = 0{,}05\sin 1''$ und $\frac{1}{3}\sigma^3 + \frac{1}{4}\sigma^2\varepsilon = 0{,}05\sin 1'$, so wissen wir gewiß, daß man durch Weglassung der Glieder 3ter Ordnung keinen Irrthum von

Digitized by Google

$0'',05$ begeht, so lange σ kleiner ist als der kleinere von den beiden Werthen, die man für σ aus den vorhergehenden Gleichungen zieht.

Um diese aufzulösen nehme man $\varepsilon = 0{,}0065$; $0{,}05 \sin 1''$ ist gleich $0{,}000000243$. Die erste Gleichung wird also: $\sigma^2 + 0{,}0024\,\sigma = 0{,}00015$, woher ohngefähr $\sigma = 0{,}011$. Die zweite ist: $\sigma^3 + 0{,}0045\,\sigma^2 = 0{,}00000073$ und giebt beinahe $\sigma = 0{,}0077$. Man kann also die Glieder dritter Ordnung in der Formel (1) immer vernachläßigen, wenn $\sigma < 0{,}0077$ ist, welches $S < 0{,}0077 \,.\, b$ oder $S < 48950$ Meter giebt. Diese Länge ist mehr als 10 Stunden Weges.

Wenn man in der Formel (3) $\psi = 45°$ setzt, so bilden die Glieder 3ter Ordnung folgende Größe: $\frac{3\sqrt{2}}{8}\varepsilon^2 \,.\, \sigma \sin V + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sigma^2 \varepsilon \sin V \cos V + \sigma^3 \sqrt{2}\left(\frac{5\cos^2 V - 1}{3}\right)\sin V.$

Diese Glieder können alle einerlei Zeichen haben, und wenn man von jedem einzelnen das maximum nimmt, so sieht man, daß sie zusammen gewiß immer weniger als: $\frac{3\sqrt{2}}{8}\varepsilon^2\sigma + \frac{3\sqrt{2}}{8}\varepsilon\sigma^2 + \frac{\sqrt{2}\,.\,16}{9\,.\,\sqrt{15}}\,.\,\sigma^3$ ausmachen. Will man, daß dieses $0'',05$ betrage, so muß man die Gleichung:

$$\sigma^3 + \frac{3\,.\,\varepsilon\,.\,9\,.\,\sqrt{15}}{8\,.\,16}\sigma^2 + \frac{3\varepsilon^2\,.\,9\sqrt{15}}{8\,.\,16}\sigma = \frac{9\,.\,0{,}05\,.\,\sin 1''\,.\,\sqrt{15}}{16\,.\,\sqrt{2}}, \text{ oder:}$$

$\sigma^3 + 0{,}0053\,\sigma^2 + 0{,}0000345\,\sigma = 0{,}000000374$ haben. Diese giebt sehr nahe $\sigma = 0{,}0047$, woher $S = 29880$ Meter, eine Länge von beinahe 7 Stunden Weges.

Aus der Formel (2) hat man für $\psi = 45°$, folgende Glieder 3ter Ordnung: $-\frac{3}{32}\varepsilon^2\sigma\sin V - \varepsilon\sigma^2 \sin V \cos V - \sigma^3(14\cos^2 V - 3)\sin V$, welche alle einerlei Zeichen haben können. Nimmt man von jedem einzelnen das maximum, so sieht man, daß sie zusammen immer weniger als: $\frac{3}{32}\varepsilon^2\sigma + \frac{\varepsilon\sigma^2}{2} + \sigma^3 \,.\, \frac{\sqrt{11\,.\,11}}{\sqrt{42\,.\,9}}$ betragen. Setzt man diese Größe gleich $0{,}05 \sin 1''$, so erhält man die Gleichung:

$\sigma^3 + 0{,}0053\,\sigma^2 + 0{,}0000069\,.\,\sigma = 0{,}00000029$. Aus dieser Gleichung findet man:

$\sigma = 0{,}0056$ und $S = 35570$ Met. ohngefähr 8 Stunden Weges.

Digitized by Google

Wir schließen aus allem Vorhergehenden, daß man, in dem Falle, wo ψ nicht weit von 45° abweicht, und wo man in den Winkeln keine größere Genauigkeit, als bis auf 0″05, fordert, immer die Glieder dritter Ordnung in den Formeln aus (132) weglassen könne, wenn die geodätischen Linien nicht bedeutend länger als 7 Stunden Weges sind.

Wenn man in den Winkeln größere Irrthümer als 0″,05 toleriren wollte, so könnte man, auf dem nämlichen Wege, wie vorhin, finden, wie groß höchstens die geodätischen Linien seyn dürfen, um in den Formeln von (132) nur die Glieder zweiter Ordnung zu beachten.

134) Wenn man in den Formeln aus (132) $V=90°$ setzt, so erhält man andere, welche dienen können, um die Aufgaben, welche in den Nummern (114), (115) mit Ausschluß der Glieder dritter Ordnung aufgelößt sind, bis auf die Glieder vierter Ordnung genau aufzulösen.

1. Wenn die Entfernung eines Punctes M Fig. XXXII. von dem Meridiane und der Perpendiculäre eines andern A gegeben ist, die Breite von M und den Längenunterschied KPM zu finden.

Man suche zuerst die Breite des Punctes K, wo die Perpendiculäre MK dem Meridian von A begegnet; sie heiße l. Die Breite des Punctes A, welche gegeben ist, sei L, l—L sei K. Die Entfernung des Punctes M von der Perpendiculäre von A, nämlich der Bogen AK, heiße T. Dann ist aus (128)

$$T = aK - a\{\tfrac{1}{4}K + \tfrac{3}{4}\cos(2L+K)\sin K\}e^2 + \\ + ae^4\{-\tfrac{3}{64}K - \tfrac{3}{16}\sin K\cos(2L+K) + \tfrac{15}{128}\sin 2K\cos(4L+2K)\}.$$

Entwickelt man $\sin K$, $\cos(2L+K)$, $\sin 2K$, $\cos(4L+2K)$, und behält nur die Größen dritter Ordnung bei; unterstellt ferner, daß K von der Ordnung e^2 sei, so wird:

1) $T = aK - ae^2K(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cos 2L) + \tfrac{3}{4}ae^2K^2\sin 2L + ae^4K\{-\tfrac{3}{64}-\tfrac{3}{16}\cos 2L + \tfrac{15}{64}\cos 4L\}$

Es ist hieraus: $K = \frac{T}{a}$ + Glieder zweiter Ordnung; also: $K^2 = \frac{T^2}{a^2}$ + Glieder dritter Ordnung; mithin: $e^2K^2 = \frac{e^2T^2}{a^2}$, und auch $Ke^4 = \frac{e^4T}{a}$; ferner ist:

$K = \frac{T}{a} + \frac{e^2T}{a}(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2L)$ + Glieder dritter Ordnung; also:

Digitized by Google

$Ke^3 = \frac{e^2 T}{a} + \frac{e^4 T}{a}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2L)$ und

$Ke^2(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2L) = \frac{e^2 T}{a}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2L) + \frac{e^4 T}{a}(\frac{11}{32} + \frac{3}{4}\cos 2L + \frac{9}{32}\cos 4L)$; substituirt man nun in (1) für $e^2 K^2$, $e^4 K$ und $Ke^2(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2L)$ ihre eben gefundenen Werthe, so wird:

$$\frac{T}{a} = K - \frac{e^2 T}{a}(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2L) - \frac{e^4 T}{a}(\tfrac{25}{64} + \tfrac{9}{16}\cos 2L + \tfrac{3}{64}\cos 4L) + \tfrac{3}{4}\frac{e^2 T^2}{a^2}\sin 2L,$$

woher (2) $$K = \frac{T}{a} + \frac{e^2 T}{a}(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos 2L) + \frac{e^4 T}{a}(\tfrac{25}{64} + \tfrac{9}{16}\cos 2L + \tfrac{3}{64}\cos 4L) - \tfrac{3}{4}\frac{e^2 T^2}{a^2}\sin 2L.$$

Um K in Secunden zu haben, dividirt man seinen Werth durch $\sin 1''$.

Wir wollen nun die Breite von M und den Längenunterschied von M und A berechnen.

Man nehme $\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang} l$; heißt dann die Breite von M, λ, und ist

$\operatorname{tang}\psi' = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\lambda$, so werden die Formeln aus (132), da hier $V = 90°$ ist,

$\psi' = \psi - \frac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{tang}\psi(1 - \varepsilon\sin^2\psi)$

$\varphi' - \varphi = \frac{\sigma}{\cos\psi}(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2) - \frac{\sigma^3 . \operatorname{tang}^2\psi}{3\cos\psi}$; σ ist gleich $\frac{S}{b}$, wenn S die Entfernung des Punctes M vom Meridiane PA bedeutet, also $S = MK$ ist; $\varphi' - \varphi$ ist der Winkel MPA. (Anwendung (269).)

2. Wenn die Breite von A, der Längenunterschied MPA, und die Breite von M gegeben sind, die Entfernungen $MK = S$ und $KA = T$ zu berechnen.

Das gegebene $\varphi' - \varphi$ heiße P. Man suche zuerst die Breite von K und die Größe $\sigma = \frac{S}{b}$.

Die Breite von K ist durch ψ bestimmt.

Von vorher ist: $\psi' = \psi - \frac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{tang}\psi(1 - \varepsilon\sin^2\psi)$

$$P\cos\psi = \sigma(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2) - \frac{\sigma^3}{3}\operatorname{tang}^2\psi.$$ Da man nur Glieder dritter Ordnung beibehält, so ist: $P^3\cos^3\psi = \sigma^3$, also $P\cos\psi = \sigma(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2) - \frac{P^3\cos\psi\sin^2\psi}{3}$ mithin $P^2\cos^2\psi = \sigma^2(1 - \varepsilon)$, woher $\sigma^2 = P^2\cos^2\psi(1 + \varepsilon)$, also

$\psi' = \psi - \frac{1}{2}P^2\cos\psi\sin\psi(1 + \varepsilon\cos^2\psi)$; nun ist offenbar $\cos\psi\sin\psi = \cos\psi'\sin\psi' +$

Digitized by Google

Glieder 2ter Ordnung, woher $P^2 \cos\psi \sin\psi = P^2 \cos\psi' \sin\psi'$, alſo:
$\psi' = \psi - \frac{1}{2} P^2 \cos\psi' \sin\psi' (1 + \varepsilon \cos^2\psi)$ und (1) $\psi = \psi' + \frac{1}{2} P^2 \cos\psi' \sin\psi' (1 + \varepsilon \cos^2\psi')$.

Um nun σ zu finden, iſt von oben:

$$P \cos\psi + \frac{P^3 \cos\psi \sin^2\psi}{3} = \sigma (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2), \text{ oder}$$

$$P \cos\psi + \frac{P^3 \cos\psi' \sin^2\psi'}{3} = \sigma (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2), \text{ und aus (1) iſt}$$

$\cos\psi = \cos\psi' - \frac{1}{2} P^2 \cos\psi' \sin^2\psi' +$ Glieder dritter Ordnung, alſo:
$P \cos\psi = P \cos\psi' - \frac{1}{2} P^3 \cos\psi' \sin^2\psi'$, folglich:
$\sigma (1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2) = P \cos\psi' - \frac{1}{6} P^3 \cos\psi' \sin^2\psi'$. Daraus zieht man

$$\sigma = (P \cos\psi' - \tfrac{1}{6} P^3 \cos\psi' \sin^2\psi')(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2) \text{ oder}$$

$$\sigma = P \cos\psi' (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{6} P^3 \cos\psi' \sin^2\psi' \quad (2).$$

Um nun auch noch T zu finden, hat man die Formel (1) aus der vorhergehenden Aufgabe, nur muß man zuerſt l aus ψ durch die Formel $\text{tang}\, l = \frac{a}{b} \text{tang}\, \psi$ berechnen.

135) Wir wollen uns nun damit beſchäftigen, in den Formeln von (132) V und σ zu berechnen, wenn ψ, ψ' und $\varphi' - \varphi$ gegeben ſind.

Dieſe Aufgabe wollen wir zuerſt auflöſen, indem wir nur Glieder zweiter Ordnung beibehalten; dann iſt aus (132)

$$\psi' - \psi = -\sigma \cos V + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma \cos V \sin^2\psi - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \sin^2 V \,\text{tang}\,\psi \text{ und}$$

$$\varphi' - \varphi = \frac{\sigma \sin V}{\cos\psi} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma \frac{\sin V}{\cos\psi} - \sigma^2 \frac{\sin V \cos V \,\text{tang}\,\psi}{\cos\psi}.$$

Es ſei $\psi' - \psi = -h$ und $\varphi' - \varphi = k$, ſo iſt $\sigma \cos V$ von h und $\sigma \sin V$ von $k \cos\psi$ nur durch Glieder zweiter Ordnung verſchieden; behält man daher keine höhere bei, ſo kann man für $\varepsilon\sigma \cos V$ und $\sigma^2 \sin^2 V$, die Größen εh und $k^2 \cos^2\psi$, und ebenſo für $\varepsilon\sigma \sin V$ und $\sigma^2 \sin V \cos V$, die Größen $\varepsilon k \cos\psi$ und $K k r. \cos\psi$, ſchreiben.

Demnach werden unſere Formeln:

$$-h = -\sigma \cos V + \tfrac{1}{2}\varepsilon h \sin^2\psi - \tfrac{1}{2} K^2 \cos\psi \sin\psi \text{ und}$$

$$K = \frac{\sigma \sin V}{\cos\psi} - \tfrac{1}{2}\varepsilon K - K h \,\text{tang}\,\psi, \text{ woher}$$

$$\sigma \cos V = h (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2\psi) - \tfrac{1}{2} K^2 \cos\psi \sin\psi.$$

$$\sigma \sin V = K (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon) \cos\psi + K h \sin\psi;$$

Digitized by Google

berechnet man dieſe Größen, und nennt $\sigma \cos V$, m und $\sigma \sin V$, n, ſo iſt

$\text{tang } V = \frac{n}{m}$ und $\sigma = \frac{n}{\sin V}$. (Anwendung (227).)

136) Will man die Glieder dritter Ordnung auch beachten, ſo darf man in den Formeln aus (132), in den Gliedern dritter Ordnung, für $\sigma \sin V$, $\sigma \cos V$, die Größen $K \cos \psi$ und h ſetzen; in die Glieder zweiter Ordnung muß man für $\sigma \sin V$ und $\sigma \cos V$ die vorhin gefundenen Werthe, welche bis auf Größen dritter Ordnung richtig ſind, ſubſtituiren. Thut man dieß, ſo erhält man Gleichungen von der Form:

$-h = -\sigma \cos V +$ bekannte Größe 2ter Ordnung + idem 3ter Ordnung

und $K = \frac{\sigma \sin V}{\cos \psi} +$ bekannte Größe 2ter Ordnung + bekannte Größe 3ter Ord.,

aus welchen man leicht die Werthe von $\sigma \cos V$, $\sigma \sin V$ zieht. (Anwendung (227).)

137) Wir werden nun die Aufgaben, welche wir von (129) an bis jetzt behandelt haben, in der größten Allgemeinheit auflöſen, nämlich, wenn man unterſtellt, daß S ſo groß ſei als man nur immer wolle.

1. S, λ, V ſind gegeben, $\phi' - \phi$, λ', V' zu finden. (Fig. XXXV. bis).

Zuerſt iſt $\text{tang } \psi = \frac{b}{a} \text{tang } \lambda$ und $\cos l' = \sin V \cos \psi$, woher wir l' finden; ferner iſt $\cos \mu = \frac{\sin \psi}{\sin l'}$, woher μ, und $\text{tang } y = \frac{\text{tang } \mu}{\cos l'}$, welche y giebt. Nun heiße DC, M, ſo giebt die Formel aus (122) M in Function von μ und l'. M iſt nämlich, was dort S, und μ, was dort x iſt.

Ebenſo giebt die Formel in (123) ϕ durch y, μ, l'.

Aus $BD = M + S$ kann man nun $B'D' = (\mu + \xi) b$ durch die Formel in (124) finden, wo σ hier $\frac{M+S}{b}$, und x hier $(\mu + \xi)$ iſt.

Hat man $\mu + \xi$, ſo hat man auch ξ, da μ bekannt iſt.

Aus $\mu + \xi$ findet man y' durch $\text{tang } y' = \frac{\text{tang } (\mu + \xi)}{\cos l'}$.

Die Formel aus (123) giebt nun ϕ' durch y', $\mu + \xi$, l'. Alſo iſt $\phi' - \phi$ gefunden.

Nun giebt das ſphäriſche Dreieck $B'A'C'$, $\frac{\sin \xi}{\sin (y' - y)} = \frac{\cos \psi'}{\sin V'}$,

Digitized by Google

woher $\sin V' = \frac{\cos\psi \sin(y'-y)}{\sin\xi}$; endlich ist:

$\frac{\cos\psi'}{1''} = \frac{\sin(\mu+\xi)}{\sin y'}$ und $\operatorname{tang}\lambda' = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\psi'$. (Anwendung (225).)

2. Wenn λ, λ', $\phi'-\phi$ gegeben sind, soll man S finden.

Wir wollen diese Aufgabe zuerst so auflösen, daß man nur die erste Potenz von ε beibehalte.

Wenn man die Aufgabe, in der Unterstellung daß die Erde sphärisch wäre, auflöste, so würde man Resultate erhalten, welche von den wahren durch Glieder mit ε verschieden wären; diese Resultate könnte man daher statt der wahren in die Glieder, welche mit ε multiplicirt sind, substituiren, indem das Vernachläßigte mit ε^2 multiplicirt wäre.

Es ist nun $\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\lambda$, $\operatorname{tang}\psi' = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\lambda'$, und:

$\cos l' = \sin V \cos\psi = \sin V' \cos\psi'$. In dem Dreiecke B'A'C' ist
$\sin V : \cos\psi' = \sin(y'-y) : \sin\xi$ und $\cos\xi = \sin\psi\sin\psi' + \cos\psi\cos\psi'\cos(y'-y)$. Wäre die Erde sphärisch, so würde $y'-y = \phi'-\phi$ seyn; man fände also ξ aus der Formel: $\cos\xi = \sin\psi\sin\psi' + \cos\psi\cos\psi'\cos(\phi'-\phi)$; nennt man dieses ξ, ξ', so ist es von dem wahren nur durch Glieder mit ε unterschieden. Man hätte ebenso
$\sin V : \cos\psi' = \sin(\phi'-\phi) : \sin\xi'$, und es wäre $\sin V = \frac{\cos\psi'\sin(\phi'-\phi)}{\sin\xi'}$, also von oben

$\cos l' = \frac{\cos\psi\cos\psi'\sin(\phi'-\phi)}{\sin\xi'}$; dieses l' ist nur bis auf Glieder mit ε richtig, es heiße l''.

Wir nehmen nun die Formel aus (123), welche:

$\phi = y - \frac{1}{2}\varepsilon\mu\cos l'$

$\phi' = y' - \frac{1}{2}\varepsilon(\mu+\xi)\cos l'$, und durch Abzug

$\phi'-\phi = y'-y-\frac{1}{2}\varepsilon\xi\cos l'$ giebt; nach der Bemerkung, welche wir anfangs machten, können wir auch: $\phi'-\phi = y'-y-\frac{1}{2}\varepsilon\xi'\cos l''$ schreiben, und erhalten also:

$$y'-y = (\phi'-\phi) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi'\frac{\cos\psi\cos\psi'\sin(\phi'-\phi)}{\sin\xi'}.$$

Nun findet man in dem Dreiecke B'A'C' nach den gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man Acht giebt, daß nicht V, V', sondern 180°—V und V' Winkel des Dreieckes sind:

Digitized by Google

$$\cot\tfrac{1}{2}(V-V')=\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi'-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\psi'+\psi)}\cot\tfrac{1}{2}(y'-y)$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(V'+V)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi')}{\cos\frac{1}{2}(\psi'+\psi)}\cot\tfrac{1}{2}(y'-y),$$ woher V und V'.

Nun haben wir $\cos l'=\sin V\cos\psi$, woher l'. Dann $\cos\mu=\frac{\sin\psi}{\sin l'}$, $\cos(\mu+\xi)=\frac{\sin\psi'}{\sin l'}$, woraus wir μ und $\mu+\xi$ ziehen. Die Formel (122) giebt nun DC durch μ und l'; ebenfalls BD durch $\mu+\xi$ und l'; woraus man durch Abzug das gesuchte $CB=S$ findet.

Die Werthe von V, V', $y'-y$, l', μ, $\mu+\xi$ und S, welche wir so eben gefunden haben, sind bis auf Glieder mit ε^2 richtig; will man nun nur die Glieder mit ε^3 weglassen, so kann man in den Formeln aus (122) und (123) die eben gefundenen Werthe statt der wahren in die Glieder mit ε setzen, und in die Glieder mit ε^2 darf man die sphärisch berechneten substituiren. Unterscheidet man die vorhin gefundenen Werthe von den wahren durch den unten angesetzten Accent, so hat man zur Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe, wenn kein Glied mit ε^2 fehlen soll, der Reihe nach folgende Formeln:

$\lambda=\ldots\ldots$, $\lambda'=\ldots\ldots$, $\phi'-\phi=\ldots\ldots$

1) $\text{tang}\,\psi=\frac{b}{a}\text{tang}\,\lambda$, $\text{tang}\,\psi'=\frac{b}{a}\text{tang}\,\lambda'\ldots\ldots$, woher ψ und ψ'.

2) $\cos\xi'=\sin\psi\sin\psi'+\cos\psi\cos\psi'\cos(\phi'-\phi)\ldots\ldots$, woher $\ldots\ldots\xi'$.

3) $(y'-y)_,=(\phi'-\phi)+\frac{\frac{1}{2}\varepsilon\xi'\cos\psi\cos\psi'\sin(\phi'-\phi)}{\sin\xi'}\ldots\ldots\ldots(y'-y)_,$

4) $\cot\frac{1}{2}(V_,-V'_,)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi'-\psi)}{\sin\frac{1}{2}(\psi'+\psi)}\cot\frac{1}{2}(y'-y)_,\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}(V_,-V'_,)$

5) $\cot\frac{1}{2}(V'_,+V_,)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi')}{\cos\frac{1}{2}(\psi'+\psi)}\cot\frac{1}{2}(y'-y)_,\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}(V_,+V'_,)$

6) $\cos l'_,=\sin V_,\cos\psi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l'_,$

7) $\cos\mu_,=\frac{\sin\psi}{\sin l'_,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mu_,$

8) $\cos(\mu+\xi)_,=\frac{\sin\psi'}{\sin l'_,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mu+\xi)_,$

9) $S_,=b\xi_,+\frac{1}{4}b\varepsilon\xi_,\sin^2 l'_,+\frac{1}{4}b\varepsilon\sin\xi_,.\sin^2 l'_,.\cos(2\mu_,+\xi_,)$.

Will man die Glieder mit ε^2 weglassen, so ist $S_,=S$; anders fährt man fort, wie folgt:

Digitized by Google

10) $y'-y=(\phi'-\phi)+\xi,\{\frac{1}{2}\varepsilon\cos l'_, -\frac{3}{8}\varepsilon^2\cos l'_, -\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2 l'_,\cos l'_,\}$
$-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin^2 l'_,.\cos l'_,.\sin\xi,\cos(2\mu,+\xi,).$

11) $\sin^2\frac{\xi}{2}=\sin^2\left(\frac{\psi-\psi'}{2}\right)+\cos\psi\cos\psi'\sin^2\left(\frac{y'-y}{2}\right)$ . . . . . $\xi.$

12) $S=\xi\{b+\frac{1}{4}\varepsilon b\sin^2 l'_,-\frac{3}{64}b\varepsilon^2\sin^4 l'_,\}+b\sin\xi,\cos(2\mu,+\xi,)\{\frac{1}{4}\varepsilon\sin^2 l'_,-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin^4 l'_,\}$
$-b.\sin 2\xi,.\cos(4\mu,+2\xi,).\frac{1}{128}.\varepsilon^2\sin^4 l'_,$

Wenn man auch die Azimuthe mit Einschluß der Glieder mit ε^2 kennen will, so nehme man die Formeln 4) und 5), worin für V', und V,, V' und V und für (y'—y),, (y'—y) geschrieben werden. (Anwendung (226).)

Das, was wir in dieser Abtheilung vorgetragen haben, ist großen Theils nach einer Abhandlung des Herrn Legendre (Mémoires de l'Institut 2ième semestre 1806) bearbeitet.

Drittes Kapitel.

Von den Projectionen der Charten.

Von d. Projectionen der Chartenüberhaupt, u. besonders von d. perspectivischen Projectionen.

138) Puncte, deren Lagen auf der Meeresfläche bekannt sind, auf einer Charte bezeichnen, heißt: diese Puncte auf die Charte projiciren. Die Regeln, nach welchen dieses geschieht, nennt man die Projections-Art, oder die Projection der Charte. Da es nicht möglich ist, den Puncten auf einer Ebene genau die Lagen gegen einander zu geben, welche sie auf der krummen Fläche haben, so hat man verschiedene Projections-Arten ersonnen, wodurch die Charten mehr oder weniger zweckmäßig eingerichtet werden. Von mehreren dieser Projections-Arten wollen wir in dem gegenwärtigen Kapitel sprechen, und untersuchen, welche Zwecke, und in wieweit dieselben, durch jede Projection erreicht werden.

139) Die Projections-Arten der Charten kann man in zwei Klassen eintheilen; in perspectivische Projectionen, und Projectionen durch Entwickelung (par dévéloppement.)

Woher diese Namen kommen, und was die beiden Gattungen von Projectionen wesentlich unterscheidet, wird aus der Discussion der einzelnen hervorgehen.

Digitized by Google

Wir wollen mit der Theorie der perſpectiviſchen Projectionen anfangen.

140) Die perſpectiviſchen Projectionen werden nur mehr gebraucht, wenn man die Charte einer Hemiſphäre entwerfen will. Da dieſe Charten immer nach einem ſehr kleinen Maaßſtabe gezeichnet werden, ſo kann in denſelben der Einfluß, den die Abplattung der Erde auf die Lage der Puncte hat, nicht merklich ſeyn; deswegen werden wir in dieſer Abtheilung durchaus unterſtellen, daß die Erde vollkommen ſphäriſch ſei.

Die vorzüglichſten perſpectiviſchen Projectionen ſind folgende; erſtens:

141) Die Projection einer Hemiſphäre auf den Horizont. Projection auf den Horizont.

Fig. XXXVI. ſei PC die Erdachſe, AF die Ebene *) des eingebildeten Horizontes (78) des Punctes L; man ſoll die Charte der Halbkugel ALF anfertigen.

Um dieſe Aufgabe zu löſen, ziehe man LCO auf AF ſenkrecht; dann von O nach allen Puncten, welche man auf der Charte haben will, gerade Linien; dieſe werden auf der Ebene AF eben ſo viele Puncte bezeichnen, und ſo wird jede, auf der Meeresfläche befindliche Figur ihre correſpondirende auf der Ebene AF haben.

Das Bild, welches auf dieſe Art entſteht, läßt ſich nun in einem kleinen Maaßſtabe auf dem Papiere zeichnen, und ſo erhält man die Charte der Halbkugel ALF.

Man macht hier die nämliche Conſtruction, als wenn man von der Halbkugel ALF ein perſpectiviſches Bild auf die Ebene AF, in der Unterſtellung zeichnen wollte, daß das Auge ſich in O befände. Aus dieſer Urſache heißt die gegenwärtige Projection eine perſpectiviſche.

Wir wollen nun die Mittel angeben, wie man nach dieſer Projections-Art die Charte einer Hemiſphäre practiſch conſtruirt. Folgende Sätze werden dieſes ungemein erleichtern.

142) Jeder Kreis auf der Meeresfläche wird auf der Charte auch durch einen Kreis vorgeſtellt werden.

Um dieſen Satz analytiſch zu beweiſen, nehmen wir die coordinirten Ebenen rechtwinkelig, den Anfangspunct der Coordinaten in C, die Achſe der z in LC, die Ebene der xy in AF, und die Ebene der xz in LCF an, ſo, daß die Linie CF die Achſe der x iſt.

*) Wenn wir in der Folge die Linie AF nennen, ſo verſtehen wir darunter die Durchſchnitts-Linie der Ebene AF mit der Ebene ALF.

Digitized by Google

Nun ist offenbar die krumme Linie, welche auf der Charte irgend einem Kreise auf der Kugel entspricht, nichts anders als die Durchschnitts-Linie der Ebene AF mit einer Kegelfläche, welche entsteht, wenn man von O nach allen Puncten des Kreises auf der Kugel gerade Linien zieht. Die Gleichung der Kugel ist $x^2+y^2+z^2=R^2$, wo R der Radius ist; die Gleichung der Ebene, welche die Kugel in dem Kreise schneidet, wovon die Rede ist, sei $z=Ax+By+D$. Ein Punct dieses Kreises habe zu Coordinaten x', y', z'; dann sind die Gleichungen der geraden Linie, welche durch O und diesen Punct geht,

1) $x-x'=\frac{x'}{z'+R}(z-z')$, 2) $y-y'=\frac{y'}{z'+R}(z-z')$; ferner muß

3) $z'=Ax'+By'+D$ und 4) $x'^2+y'^2+z'^2=R^2$ seyn. Wenn wir aus diesen 4 Gleichungen x', y', z', eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung mit x, y, z, welche die des Kegels ist; denn sie drückt eine Beziehung zwischen x, y, z aus, welche allen Puncten angehört, die auf der Linie, deren Gleichungen (1), (2) sind, in jeder möglichen Stellung, und folglich auf der Kegelfläche liegen.

Die Gleichungen (1) und (2) geben $\frac{x-x'}{x'}=\frac{y'-y'}{y'}$ oder $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$, $y'=\frac{yx'}{x}$,

ferner ist aus (1) $xz'=x'(z+R)-Rx$, und aus (3) $z'=Ax'+\frac{Byx'}{x}+D$, oder...

$xz'=x'(Ax+By)+Dx$, mithin durch Abzug $x'(z+R-Ax-By)=x(R+D)$,

woher $x'=\frac{(D+R)x}{z+R-Ax-By}$, und sofort $y'=\frac{y(D+R)}{z+R-Ax-By}$, folglich nach (3)

$$z'=\frac{A(D+R)x+B(D+R)y}{z-Ax-By+R}+D=\frac{R(Ax+By+D)}{z-Ax-By+R}$$

Setzt man diese Werthe von x', y', z' in (4), so erhält man:

$R^2=\frac{(D+R)^2(y^2+x^2)+R^2(Ax+By+D)^2}{(z-Ax-By+R)^2}$, welche die Gleichung des Kegels ist.

Die Gleichung der krummen Linie, in welcher der Kegel die Ebene AF, das heißt die Ebene der xy, schneidet, erhält man, wenn man $z=o$ macht; sie ist also:

$$R^2=\frac{(D+R)^2(y^2+x^2)+R^2(Ax+By+D)^2}{(Ax+By-R)^2}$$ oder:

$R^2(Ax+By)^2-2R^3(Ax+By)+R^4=(D+R)^2(y^2+x^2)+R^2(Ax+By)^2+$

$+2DR^2(Ax+By)+R^2D^2$, oder

Digitized by Google

$(D+R)^2(y^2+x^2)+2R^2(D+R)(Ax+By)+R^2(D^2-R^2)=0$ oder

$y^2+x^2+\frac{2R^2}{D+R}(Ax+By)+\frac{R^2(D-R)}{D+R}=0$, welche die Gleichung eines Kreises ist, wie zu beweisen war. Man kann sie unter folgende Form setzen:

$$\left(y+\frac{R^2.B}{D+R}\right)^2+\left(x+\frac{R^2.A}{D+R}\right)^2=\frac{R^2(D-R)}{D+R}+\frac{R^4B^2}{(D+R)^2}+\frac{R^4A^2}{(D+R)^2}=$$

$$=\frac{R^2}{(D+R)^2}(R^2(1+A^2+B^2)-D^2).$$ Hieraus sieht man, daß die Abscisse des Centrums dieses Kreises $=-\frac{R^2A}{D+R}$, die Ordinate $=-\frac{R^2B}{D+R}$, und der Radius

$=\frac{R}{R+D}\sqrt{R^2(1+A^2+B^2)-D^2}$ ist.

143) Die Kreise, welche auf der Charte die Meridiane vorstellen, machen unter einander die nämlichen Winkel, wie die Meridiane selbst.

Um diesen Satz zu beweisen, mögen Fig. XXXVII. die nämlichen Buchstaben das Nämliche wie in Fig. XXXVI. bedeuten; PQ sei eine Tangente an ALPO, und PR eine Tangente an irgend einen andern Meridian; so ist RPQ der Winkel der beiden Meridiane.

Sind nun R und Q die Puncte, wo PR und PQ der Ebene AF begegnen, so werden m'Q und m'R die Linien PQ, PR auf der Charte vorstellen. Da nun m'R nothwendig eine Tangente an den Kreis seyn muß, welcher dem Meridiane, dessen Tangente PR ist, entspricht, so ist auch Rm'Q der Winkel, den die beiden in Rede stehenden Meridiane auf der Charte mit einander machen, und wir haben zu beweisen, daß QPR = Qm'R ist.

Aber die Ebene QPR steht auf der Linie PC und folglich auf der Ebene LCF senkrecht; ebenso steht die Ebene AF auf LCF senkrecht; mithin muß auch RQ auf der Ebene LCF, und folglich auf den Linien PQ und m'Q senkrecht seyn. Nun sind die Winkel QPm' und Pm'Q gleich; denn $m'PQ=\frac{90^\circ+PF}{2}$, und ebenso

$Pm'Q=\frac{90^\circ+PF}{2}$. Die Linie PQ ist also gleich m'Q; mithin müssen die rechtwinkeligen Dreiecke PQR und Qm'R congruent seyn, woher der Winkel RPQ = Rm'Q ist, wie bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

144) Wir wollen nun nach den Sätzen der beiden vorhergehenden Nummern eine Charte in der gegenwärtigen Projections-Art zu construiren suchen.

1. Auf der Charte einen Meridian zu zeichnen, dessen Winkel mit dem Meridiane ALPO gegeben ist.

In der Ende-Gleichung aus (142) ist, wenn sie einen Meridian vorstellen soll, $D = o$, weil die Ebene $z = Ax + By + D$ durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Die Linie, in welcher diese Ebene die Ebene der xz schneidet, hat zur Gleichung $z = Ax$ und ist hier die Erdachse. Wenn λ die Breite des Punctes L ist, so ist die Gleichung der Erdachse auch $x = z \tang \lambda$; folglich muß $A = \tang \lambda$ seyn. Die Abscisse des Centrums des Kreises, welcher den Meridian auf der Charte bezeichnet, ist demnach $-R \tang \lambda$. Diese Größe ist von der Lage des Meridians unabhängig, woraus wir schließen, daß die Mittelpuncte aller Meridiane auf der Charte einerlei Abscisse haben, und daher auf einer und der nämlichen geraden Linie, welche auf der Achse der x senkrecht steht, liegen.

Nun sei Fig. XXXVIII. MRFKA der Kreis, welcher auf der Charte den Kreis AF Fig. XXXVII. andeutet. CF Fig. XXXVIII. bezeichne die Linie AF in Fig. XXXVII. und folglich auch den Meridian ALPO. Man nehme $RCF = \lambda$; dann ist $FI = R \tang \lambda$. Da nun CF die früher angenommene Achse der x und CK die Achse der y ist, so nehme man $CS = FI$; dann müssen alle Meridiane ihre Mittelpuncte auf ST haben.

Alle Meridiane gehen auch durch den Punct m′ Fig. XXXVII; um diesen Punct auf der Charte zu finden, wissen wir, daß er auf der Linie AF Fig. XXXVIII. liegen muß, und er ist vom Centrum um Cm′ Fig. XXXVII. entfernt. Da nun nothwendig die Cm′ in beiden Figuren gleich sind, so ist m′ Fig. XXXVIII. der Punct, durch welchen alle Meridiane gehen müssen.

Nimmt man nun den Winkel $Sm'T = 90°$ weniger den Winkel, den der zu zeichnende Meridian mit ALOF Fig. XXXVII. machen soll, so wird T das Centrum des gesuchten Kreises seyn; denn wenn Nm′S der Winkel ist, den die Meridiane mit einander bilden, so ist nach (143) m′N eine Tangente an den zu findenden Kreis, und da man $Sm'T + Nm'S = 90°$ machte, so muß Tm′ ein Radius dieses Kreises seyn.

2. Auf der Charte einen Kreis zu zeichnen, welcher einen Parallelkreis, dessen Breite gegeben ist, vorstellt.

Digitized by Google

Fig. XXXVI. bezeichne m n einen Parallelkreis; m und n ſind die Puncte, wo er den Meridian A L F ſchneidet; dieſe Puncte werden in der Charte auf die Linie A F, und in die Puncte S, T fallen.

Um die Lagen von S und T auf der Charte zu finden, nehme man Fig. XXXVIII. R n = R m = 90° weniger der Breite des zu zeichnenden Parallelkreiſes; dann ziehe man m K und n K, ſo erhält man die Puncte T′ und S′, welche offenbar die geſuchten ſind. Das Centrum des Parallelkreiſes muß aber auf A F liegen; um ihn alſo zu beſchreiben, braucht man nur die Linie S′T′ zu halbiren, und aus ihrer Mitte, mit einem Radius gleich ihrer Hälfte, einen Kreis zu ziehen.

144) bis. Die beiden vorhergehenden Aufgaben können durch Rechnung gelöſt werden, wie folgt:

Die, am Ende von (142) gefundene Gleichung giebt die Lage des Centrums und den Radius des Kreiſes auf der Charte, wenn man nur die Gleichung der Ebene kennt, welche den Kreis auf der Kugel bildete. Wollen wir alſo das Centrum und den Radius eines Meridians auf der Charte beſtimmen, ſo müſſen wir vor Allem die Gleichung der Ebene des wirklichen Meridians haben. Aus (114) wiſſen wir ſchon, daß $D = o$ und $A = \text{tang}\,\lambda$ iſt. Nennt man nun p den bekannten Winkel des Meridians mit A L P O Fig. XXXVI, ſo findet man durch die Auflöſung eines rechtwinkeligen ſphäriſchen Dreieckes, deſſen Spitze in P und deſſen rechter Winkel in F iſt, daß die Linie, in welcher der Meridian die Ebene der y, x, ſchneidet, mit der Achſe der x einen Winkel macht, der zur Tangente $\sin\lambda\,\text{tang}\,p$ hat. Die Gleichung der beſagten Durchſchnittslinie iſt alſo $y = x \sin\lambda\,\text{tang}\,p$. Soll aber $z = Ax + By$ die Gleichung der Meridian-Ebene ſeyn, ſo iſt auch $Ax + By = o$ eine Gleichung der nämlichen Durchſchnittslinie, und man weiß alſo, daß $-\frac{A}{B} = \sin\lambda\,\text{tang}\,p$, folglich $B = -\frac{1}{\cos\lambda\,\text{tang}\,p}$ iſt.

Mit Hülfe dieſer Werthe von A, B, D, findet man für den Meridian auf der Charte:

die Abſciſſe des Centrums . . . . . $= -R\,\text{tang}\,\lambda$

die Ordinate des Centrums . . . . . $= \frac{R}{\cos\lambda\,\text{tang}\,p}$

den Radius . . . . . $= \frac{R}{\cos\lambda \sin p}$.

Digitized by Google

Wenn $p = 90°$, so wird die Ordinate o und der Radius ist $\frac{R}{\cos\lambda}$, welches die Linie Sm' Fig. XXXVIII. giebt, wodurch man den Punct m' bestimmt. Ist dieser einmal gefunden, so braucht man nur die Ordinaten und keine Radien mehr zu berechnen.

Für einen Parallelkreis muß sich die Gleichung der Ebene auf die der Linie mn, Fig. XXXVI. reduziren. Die Breite des Parallelkreises sei λ'; so findet man für die Gleichung der Linie mn, $z = -x\cot\lambda + R\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda}$. Da diese nun mit $z = Ax + By + D$ identisch seyn soll, so muß: $A = -\cot\lambda$, $B = o$, $D = \frac{R\sin\lambda'}{\sin\lambda}$ seyn. Hieraus erhält man für den Parallelkreis auf der Charte:

Abscisse des Centrums . . . . . $= \frac{R\cos\lambda}{\sin\lambda' + \sin\lambda} = \frac{R\cos\lambda}{2\sin\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right)}$

Ordinate des Centrums . . . . . $= o$

Radius . . . . . $= \frac{R\cos\lambda'}{\sin\lambda' + \sin\lambda} = \frac{\text{Abscisse} \times \cos\lambda'}{\cos\lambda}$.

Ist die Breite des Parallelkreises südlich, so muß man sie negativ nehmen. Wird die südliche Breite des Parallelkreises der nördlichen Breite des Ortes L gleich, so werden Abscisse und Radius unendlich. Der Kreis auf der Charte wird dann eine gerade Linie, welche auf der Achse der x senkrecht ist.

145) Wenn die Breite und Länge eines Punctes gegeben sind, so kennt man den Meridian und Parallelkreis, worauf er liegt; es wird demnach leicht seyn, den Punct auf der Charte zu bestimmen, wenn man seinen Meridian und seinen Parallelkreis zieht. Da man indessen bei der Construction solcher Charten, wovon hier die Rede ist, nie eine große Genauigkeit bezweckt, so zeichnet man auf dieselben Meridiane und Parallelkreise in kleinen Entfernungen von einander, und bestimmt dann ohngefähr den Platz, wo ein Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, hinkommen muß. So sind z. B.

Fig. XXXIX. Meridiane und Parallelkreise von 10 zu 10 Graden gezeichnet; auf dieser Figur erkennt man leicht die ohngefähre Breite und Länge eines Punctes, und wird auch ebenso leicht einen Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, bezeichnen können.

Digitized by Google

Z. B. die Breite des Punctes A ist nördlich und beträgt 40°; seine östliche Länge von dem Meridiane (360, 180) her ist 70°: Die Breite des Punctes C ist nördlich und beträgt ohngefähr 45°. Die östliche Länge des Punctes C von dem Meridiane (360, 180) ist ohngefähr 104°.

146) Man könnte fordern, in der gegenwärtigen Projection die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Puncten A, C zu zeichnen. Diese kürzeste Linie ist, wie wir wissen, der Bogen eines größten Kreises, welcher durch A und C geht. Unsere Aufgabe wäre demnach: die Projection dieses größten Kreises zu zeichnen. Um sie zu lösen, ziehe man von A nach dem Centrum der Charte die Linie AO; diese wird die Projection der Durchschnittslinie des zu zeichnenden Kreises mit dem Meridiane von A seyn. Verlängert man sie daher, bis sie dem Meridian von A auf der Charte noch einmal begegnet, so ist sie eine Sehne des gesuchten Kreises. Da nun AC auch eine solche Sehne ist, so kann der Kreis beschrieben werden. Wir bemerken noch, daß man das zu dieser Construction nöthige Perpendikel auf die Mitte der Sehne AO... leicht erhält, wenn man aus dem Centrum P des Meridianes von A auf AO eine senkrechte PQ zieht. Der gesuchte Kreis ist auf unserer Figur IACK.

Wir beendigen hier die Theorie der Projection auf den Horizont mit einigen Bemermerkungen. Wenn man die Hemisphäre, deren Bild in dieser Projection entworfen wird, als der Himmelskugel zugehörig betrachten wollte, so würde sie derjenige Theil dieser Kugel seyn, welchen man in dem Puncte der Erde, auf dessen Horizont projicirt wird, sehen kann. Man braucht deshalb häufig die Projection auf den Horizont, um Sternkarten anzufertigen.

Bei der Ansicht der Figur XXXVI. ergiebt sich, daß der Theil der Halbkugel, welcher in der Nähe von L liegt, am meisten auf der Charte seine eigenthümliche Gestalt beibehält. Soll man also die Charte einer Erde-Hälfte nach der hier behandelten Projection construiren, so muß man den Horizont desjenigen Punctes dazu wählen, um welchen der interessanteste Theil der darzustellenden Hemisphäre liegt.

Ueber die Art, wie Puncte, deren Breite und Länge bekannt sind, auf eine Figur wie Fig. XXXIX. aufgetragen werden, und wie man umgekehrt die Länge und Breite eines Punctes auf einer solchen Figur erkennt, ist Folgendes zu bemerken.

Digitized by Google

Die Zwischenräume der Parallelkreise, so wie die der Meridiane, sind nirgendwo gleich; wenn daher der Punct D in der Mitte zwischen m und n liegt, kann man deswegen nicht sagen, daß Dn, 5° betrage. Um zu sehen, ob Dn für mehr oder weniger angenommen werden müsse, bedenke man, daß ein Parallelkreis, welcher 5° über n durchgienge, die Linie mn sehr nahe ebenso theilen würde, wie der Parallelkreis in n die Linie mo theilt; da nun mn kleiner als no ist, so muß D näher bei m als bei n liegen, wenn Dn, 5° seyn soll; hier ist also $Dn < 5°$. In einer großen Figur kann diese Bemerkung dienen, um die Abschätzung der Lage der Puncte, sowie auch das Auftragen derselben um Vieles genauer zu machen. (Eine numerische Anwendung der vorhergehenden Projection siehe (228).)

Projection auf den Meridian.

147) Von der Projection einer Hemisphäre auf einen Meridian.

Fig. XL. sind P, P′ die beiden Pole; PP′ stellt einen Meridian vor; PLP′O bedeutet einen anderen, welcher auf dem vorigen senkrecht steht; LO bezeichnet also den Equator; man will die Charte der Halbkugel PLP′ anfertigen.

Diese Charte wird genau nach der nämlichen Regel, wie die vorige, gezeichnet; man zieht aus O, welcher ein Durchschnittspunct des Equators mit dem Meridiane PLP′O ist, nach den zu projicirenden Puncten der Hemisphäre PLP′, gerade Linien, und bezeichnet so auf der Ebene PP′ Figuren, welche, in einem kleinen Maaßstabe abgebildet, die verlangte Charte ausmachen.

Bei der Construction dieser Charte kann man den Satz anwenden, daß jeder Kreis auf der Kugel auch in der Charte einen Kreis bilden wird; denn der frühere Beweis (142) ist ohne alle Veränderung auf den jetzigen Fall anwendbar.

148) Auf der Charte den Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Meridian vorstellt.

Fig. XLI. sei PEP′E′ der Meridian PP′ aus Fig. XL. Die Linie PP′ ist hier wie dort die Erdachse, EE′ die Durchschnittslinie des Equators mit dem Meridiane PP′; dann wird EE′ den Equator, und die Linie PP′ den Meridian PLP′O auf der Charte andeuten. Der andere Meridian, welchen wir zeichnen wollen, muß durch die Puncte P, P′, gehen; wir suchen daher nur noch einen dritten Punct desselben zu bestimmen, und hierzu wählen wir denjenigen, wo er dem Equator begegnet.

Digitized by Google

Dieſer Punct muß aber in der Charte auf EE′ liegen; denkt man ſich nun Fig. XL. den Equator um die Linie LO gedreht, bis er auf den Kreis PLP′O fällt, ſo fällt die Linie, welche in Fig. XLI. EE′ iſt, auf die PCP′, und der Punct, wo der Meridian dem Equator begegnet, irgendwo in A auf den Kreis PLP′, ſo, daß der Bogen PA dem Winkel des zu zeichnenden Meridians mit dem PP′ gleich iſt. Zieht man nun AO, ſo iſt CS offenbar die Entfernung, in welcher der Punct A auf der Charte vom Centrum C liegt. Man nehme alſo (Fig. XLI.) den Bogen EA′ gleich dem gegebenen Längenunterſchiede des Meridianes PP′ und des zu zeichnenden Kreiſes, ziehe dann A′P′, ſo iſt S′ der Punct, wo der geſuchte Meridian die Linie EE′ ſchneidet; dieſer Meridian iſt daher ein Kreis, welcher durch die drei Puncte P, S′, P′ geht.

149) Auf der Charte einen Parallelkreis MQ Fig. XL. zu zeichnen.

Dieſer Parallelkreis begegnet dem Meridian PP′ in zwei Puncten N Fig. XLI, welche von P um den Bogen PM Fig. XL. entfernt liegen; man erhält alſo die Puncte N auf der Charte, wenn man PN Fig. XLI = PM Fig. XL. macht. Der Punct M wird in der Charte auf die Linie PP′ fallen, und zwar in einer Entfernung CT vom Centrum.

Man erhält alſo den Punct M in T′ Fig. XLI, wenn man von E nach N eine gerade Linie zieht; denn es muß CT′ = CT ſeyn. Der zu findende Parallelkreis iſt alſo ein Kreis, welcher durch die drei Puncte N, N, T′ geht.

Wenn man die beiden vorhergehenden Aufgaben analytiſch auflöſen will, ſo nenne man p den Winkel des Meridianes PP′ mit dem zu zeichnenden, und λ die Breite des Parallelkreiſes, welchen man projiciren ſoll. Man findet dann für den Meridian:

Abſciſſe des Centrums . . . . . = o

Ordinate . . . . . = − R tang p

Radius . . . . . $= \frac{R}{\cos p}$.

Für den Parallelkreis wird:

Abſciſſe des Centrums . . . . . $= -\frac{R}{\sin \lambda}$

Ordinate . . . . . = o

Radius . . . . . = R cot λ.

Digitized by Google

Fig. XLII. sind die Meridiane und Parallelkreise nach der gegenwärtigen Projection von 10 zu 10 Graden gezeichnet; die Bemerkungen, welche wir über die Abschätzung der Lagen der Puncte, in (146) gemacht haben, gelten auch noch hier.

Aus der nämlichen Ursache, welche wir bei der vorigen Projection (141) anführten, wird auch diejenige, von der wir eben gesprochen haben, eine perspectivische genannt.

Von der Projection einer Hemisphäre auf den Equator.

150) Von der Projection einer Hemisphäre auf den Equator.

Wenn Fig. XLII bis) EQ den Equator und PP′ die Erdachse bedeutet, so kann man von der Halbkugel EPQ eine Charte auf die Ebene des Equators entwerfen, wenn man von P′ nach den Puncten der Halbkugel gerade Linien zieht, und so auf der Ebene EQ Puncte bezeichnet, welche die auf der Kugelfläche vorstellen.

Diese Projections-Art ist nur ein besonderer Fall der Projection auf den Horizont. Die Meridiane werden hier gerade Linien seyn, welche mit einander die nämlichen Winkel machen wie die Meridiane selbst; die Parallelkreise haben alle ihr Centrum im Centrum des Equators; den Radius der Projection eines Parallelkreises m n findet man leicht; denn wenn man P′m und P′n zieht, so ist m′n′ der Durchmesser.

151) Wenn man in der gewöhnlichen Geometrie von der Projection einer Figur auf eine Ebene spricht, so versteht man darunter die Figur, welche entsteht, wenn aus allen Puncten der ersten auf die besagte Ebene Perpendikel gefällt werden. Diese Art von Projection wird die orthographische genannt, und ist von der perspectivischen verschieden. Letztere nennt man auch die stereographische.

Wollte man eine Charte nach der orthographischen Projection construiren, so müßte man bemerken, daß nur diejenigen Kreise der Kugel, welche mit der Ebene der Charte parallel wären, sich als Kreise projiciren würden; die anderen müßten Ellipsen bilden, deren Construction leicht zu finden wäre.

Die orthographische Projection ward fast nie gebraucht, um größere oder mittlere Charten zu zeichnen. Man bedient sich derselben nur bei Detail-Aufnahmen, wo man, wie bekannt, alle Puncte auf den scheinbaren Horizont orthographisch projicirt.

(Numerische Anwendung in (229).)

Von den Projectionen durch Entwickelung.

152) Die Projectionen durch Entwickelung dienen meistens um Charten von kleinen Theilen der Erdfläche zu construiren. Diese Charten sollen einen doppelten Zweck erfüllen; erstens soll man auf denselben die wahren absoluten Lagen, d. h. die Breiten und Längen

Digitized by Google

der Puncte erkennen können, und zweitens sollen die Lagen der Puncte gegen einander dem Auge möglichst genau dargestellt seyn.

Der erste Zweck kann durch jede Projections-Art erreicht werden, wenn man Meridiane und Parallelkreise auf die Charte zieht. Man wird dann die Breite und Länge eines Punctes desto genauer von der Charte abnehmen können, je näher diese Meridiane und Parallelkreise bei einander gezogen sind, und dieses kann desto mehr geschehen, je größer der Maaßstab ist, nach welchem die Charte gezeichnet wird.

Hingegen ist keine Projection möglich, welche den zweiten Zweck vollkommen erfüllte. Die Projectionen, von welchen wir hier sprechen werden, sind diejenigen, wodurch man der Erreichung dieses Zweckes bisher am nächsten gekommen ist; ehe wir jedoch zur Theorie jeder einzelnen übergehen, finden wir nöthig, über die Construction der Charten, zu welchen sie dienen sollen, im Allgemeinen etwas zu sagen.

153) Das Land, von welchem man eine Charte haben will, wird zuerst in mehrere kleine Theile zertheilt, deren jeder sich zu einer besondern Aufnahme nach der orthographischen Projection (151) eignet; diese Theile werden wir die Blätter der Charte nennen. Man verbindet hierauf so viele Puncte des Landes durch ein trigonometrisches Netz, daß sich in jedem Blatte mehrere solcher Puncte befinden. Nachdem die Dreiecke dieses Netzes mit der nothwendigen Genauigkeit aufgelöst worden sind, berechnet man die geographischen Längen und Breiten ihrer Eckpuncte *), welche dann, nach der angenommenen Projections-Art, auf die Chartenblätter aufgetragen werden. Obgleich nun diese Puncte nicht genau die nämlichen Lagen gegeneinander, wie in der Wirklichkeit haben, so sind die Abweichungen, wie wir sehen werden, in kleinen Entfernungen gering genug, damit sie noch weit unter den Irrthümern, welche bei jeder Detail-Aufnahme begangen werden, bleiben; so, daß die Aufnehmenden ihre Arbeiten nach den Puncten des Netzes, welche auf ihren Blättern liegen, richten und verificiren können; und dieses ist durchaus nothwendig, wenn nicht die ganze Aufnahme durch immerwährende Anhäufung der Irrthümer, zuletzt

*) Zu dieser Berechnung ist es nöthig die Breite eines Punctes des Netzes, und den Azimuth einer Seite, die durch diesen Punct geht, zu kennen. Diese Stücke werden entweder unmittelbar astronomisch bestimmt, oder man erhält sie durch die Verbindung des Netzes mit einer Seite irgend eines anderen, welches in allen seinen Theilen vollkommen bekannt ist.

Digitized by Google

höchst fehlerhaft werden soll, wodurch die Blätter nicht mehr in ein Ganzes vereinigt werden könnten.

Wenn die Aufnehmenden sich der Boussole bedienen wollen, so müssen ausser den Puncten des Netzes, auch die Richtungen der Meridiane auf den Blättern angegeben seyn. Um die Charte zu bilden, werden die Blätter, gewöhnlich in einem kleinern Maaßstabe, zusammengetragen. Auf dieser Charte müssen Meridiane und Parallelkreise, je näher, desto besser, wie wir (152) bemerkten, gezeichnet seyn.

Anmerkung. Der Erdstrich, dessen Charte man erhalten will, kann so ausgedehnt seyn, daß die Abweichungen der Lagen der Puncte gegeneinander auf der Charte von ihren wahren Lagen groß genug werden, damit diese Puncte nicht mehr zur Verification der Aufnahme dienen können; in diesem Falle muß man das Land in mehrere Theile theilen, von jedem eine besondere Charte anfertigen und diese nachher in eine einzige zusammentragen.

Wie unvollkommen auch immer der Begriff seyn mag, den man nach dem Vorhergehenden von der Construction der Charten haben könnte, so wird es doch klar geworden seyn, daß in jedem Falle folgende Aufgaben aufzulösen sind:

1. Einen Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, auf der Charte zu bezeichnen.

2. Auf der Charte Meridiane und Parallelkreise zu ziehen.

154) Eine Fläche nennen wir entwickelbar (dévéloppable), wenn sie sich so wie eine Cylinder- oder Kegel-Fläche, auf eine Ebene aufrollen, entwickeln, läßt.

Wäre die Erdfläche von dieser Art, so könnte man keine einfachere Projection erdenken, als, den Theil der Erdfläche, dessen Charte man haben will, auf eine Ebene zu entwickeln. Diese Projection würde sehr große Vortheile haben; 1) wären die Flächeninhalte auf der Charte genau dieselben wie in der Wirklichkeit; 2) müßten alle geodätische Linien auf der Charte gerade Linien, und nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, mit den wahren geodätischen Linien von gleicher Länge seyn.

Hieraus folgt, daß auf einer Charte, welche nach dieser Projections-Art gezeichnet wäre, die Abweichungen der Lagen der Puncte gegeneinander von den wahren Lagen erst dann merkbar seyn könnten, wenn die Puncte weit genug von einander entfernt wären, damit die Krümmung der geodätischen Linien nicht mehr ausser Acht bleiben dürfte. Alles Detail auf der Charte wäre also mit dem wirklichen auf der Erdfläche so ähnlich, als man es verlangen könnte.

Digitized by Google

Es ist nach dem Vorhergehenden sehr natürlich, einen kleinen Theil der Erdfläche mit einer entwickelbaren Fläche zu vergleichen, um die Charte desselben durch Entwickelung zu erhalten; und so entstanden die Projections-Arten, deren Eigenschaften wir in den folgenden Nummern untersuchen wollen.

155) Die cylindrische Projection. Die cylindrische Projection.

Fig. XLIII. ist P der Pol; EQ bedeutet den Equator PA, PA′ sind zwei Meridiane.

Man kann die Charte des kleinen Theils der Erdfläche, welcher zwischen den Meridianen PA, PA′, und den Parallelkreisen BB′, AA′ liegt, durch Entwickelung projiciren, wenn man annimmt, daß er mit der Fläche eines senkrechten Cylinders einerlei sei, welcher zur Höhe den Abstand der Parallelkreise, nämlich SR, und zur Grundfläche den Parallelkreis hat, welcher durch die Mitte von AB geht.

In dieser Unterstellung würde jeder Meridian eine Seitenlinie des Cylinders, und jeder Parallelkreis ein mit der Grundfläche desselben paralleler Kreis seyn. In der Entwickelung wären daher alle Meridiane gerade parallele Linien, und die Parallelkreise eben solche, welche auf den erstern senkrecht ständen.

Das Viereck AB B′A′ würde in dieser Projection ein Rechteck auf der Charte bilden, wo weder Gestalt noch Inhalt der Figuren die nämlichen wie auf der Kugel seyn könnten.

Da diese Projection höchst selten gebraucht wird, so wollen wir uns in keine nähere Discussion derselben einlassen, sondern nur noch die Art angeben, wie man die Constructionen macht, welche sie erfordert.

Die gegebenen Dinge sind die Breite von $A = \lambda$

die Breite von $B = \lambda'$

der Winkel $APA' = P°$.

Zuerst entwickelt man den Kreisbogen mn auf eine gerade Linie. Hierzu muß man die Länge von mn haben.

Die Breite von m ist $\frac{\lambda + \lambda'}{2}$, welche wir λ'' nennen wollen. Der Radius des Parallelkreises mm′ ist $= R \cos \lambda''$, wo R entweder den mittleren Radius der Erde, oder, wenn man auf die Abplattung Rücksicht nimmt, den Krümmungshalbmesser des Meridians

Digitized by Google

AP in m bedeutet; in diesem Falle ist $R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda'')^{\frac{3}{2}}}$, oder

$\log R = \log a - Ke^2 + \frac{3}{2}Ke^2\sin^2\lambda''$ *).

Da nun mn zum Centriwinkel P° hat, so ist $mn = \frac{P\pi . R\cos\lambda''}{180}$.

Hat man mn entwickelt, so errichte man darauf ein Perpendikel, welchem man oberhalb und unterhalb mn die Längen Sm und mR gebe. Um zu finden, wie lang Sm ist, wissen wir, daß $SK = R\sin\lambda'$, ebenso $mK = R\sin\lambda''$, mithin $Sm = R(\sin\lambda' - \sin\lambda'')$, oder $Sm = 2R\cos\left(\frac{\lambda'+\lambda''}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda'-\lambda''}{2}\right)$ ist. Nun kann man das Rechteck vollenden, welches das Viereck ABB'A' vorstellen soll.

Es bleibt uns übrig zu zeigen, wie man einen Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, auf die Charte setzt.

Die Breite des Punctes I sei λ''' und der Winkel $IPB = p$, so ist $mw = \frac{p.\pi.R}{180}\cos\lambda''$; diese Länge trage man in Fig. XLIV. auf, so wird Tu der Meridian von I seyn. Der Parallelkreis von I geht auf dem Cylinder durch L, und $Lm = R(\sin\lambda''' - \sin\lambda'')$. Trägt man nun Lm in Fig. XLIV. und zieht LI mit mn parallel, so ist LI der Parallelkreis von I, wodurch also dieser Punct vollkommen bestimmt ist.

Es erhellt aus dem Vorhergehenden auch, wie man auf eine Charte nach der gegenwärtigen Projection Meridiane und Parallelkreise zieht. Man sieht, daß Meridiane, welche auf der Erde gleiche Winkel miteinander machen, auf der Charte durch gleichweit entfernte Linien dargestellt sind, welches aber nicht für Parallelkreise gilt.

Die weitere practische Ausführung haben größtentheils alle Projectionen mit einander gemein, und wir werden davon ausführlich bei der modificirten Flamsteed'schen Projection in (167 et seq.) sprechen.

Die conische Projection.

156) Die conische Projection.

*) Wenn man die Excentricität berücksichtigt, so ist der Punct, dessen Breite $\frac{\lambda+\lambda'}{2}$ ist, nicht mehr genau die Mitte von AB, welches aber hier nichts zur Sache thut.

Digitized by Google

Bei den nämlichen gegebenen Dingen wie im vorigen §. kann man auch die Charte des Viereckes ABB'A' machen, wenn man annimmt, daß es mit einem Theil einer Kegelfläche verwechselt werden könne, welche erzeugt wird, wenn die Tangente Tm Fig. XLV. sich um TO herumdreht.

Die Parallelkreise würden dann Kreise auf der Kegelfläche seyn, und folglich in der Entwickelung Kreisbogen, deren Centrum in T läge. Die Meridiane wären gerade und in T zusammenlaufende Linien.

Um diese Projection zu construiren, beschreibe man mit dem Radius $Tm = R\cot\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)$ Fig. XLVI. einen Kreisbogen. Auf diesem Bogen nehme man ein Stück mn so lang als mn Fig. XLV, mithin gleich $\frac{P\pi . R}{180}\cos\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)$.

Will man nun auf der Projection irgend einen Meridian, dessen Länge von PA her p ist, ziehen, so nehme man nur auf mn den Bogen $mK = \frac{\pi . p . R}{180}\cos\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)$ und ziehe TK, so ist dieses der gesuchte Meridian.

Um den Parallelkreis BB', dessen Breite λ' ist, in der Projection zu zeichnen, nehme man TS Fig. XLVI = TS Fig. XLV; um dieses TS zu finden, ist:

$TS : TV = Tm = : Tm' = 1 : \cos\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)$; nun ist: $TO = \frac{R}{\sin\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)}$, $OV = R\sin\lambda'$,

$TV = TO - OV$ und $TS = \frac{TV}{\cos\left(\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)}$. Hieraus sieht man auch, wie man jeden anderen Parallelkreis auf der Charte zeichnet.

Endlich wird man leicht jeden Punct, dessen Länge und Breite gegeben sind, auf der Charte bestimmen können, indem man seinen Meridian und seinen Parallelkreis zieht. Wenn die Charte in einem ziemlich großen Maaßstabe gezeichnet wird, so kann es oft geschehen, daß der Punct T so weit von m fällt, daß es nicht mehr möglich ist, die Parallelkreise mit dem Cirkel zu beschreiben. In diesem Falle werden die Puncte durch Coordinaten bestimmt, wie folgt:

Man wähle sich einen willkührlichen Meridian TM Fig. XLVI. als Achse der Abscissen, und einen Punct M desselben als Anfangspunct der Coordinaten. Will man nun einen Punct O bestimmen, so berechne man seine Ordinate OI und seine Abscisse MI.

Digitized by Google

Hierzu ist: $OI = TO \cdot \sin OTI$ und $MI = Tm - OT \cdot \cos OTI$. Wie man den Radius des Parallelkreises, nämlich TO, findet, wissen wir schon; um den Winkel OTI zu finden, berechne man die Länge des Bogens des Parallelkreises von O, welcher zwischen TO und TI liegt, wie wir es vorhin gezeigt haben. Wenn die geographische Länge des Punctes O von M her p' ist, so wird dieser Bogen $\frac{\pi p' R \cos \lambda''}{180^\circ}$ seyn, wo λ'' die Breite von O bedeutet. Dann ist offenbar der Winkel $OTI = \frac{p' . R \cos \lambda''}{TO}$.

Das Weitere findet man bei der modificirten Flamsteed'schen Projection.

Von der ursprünglichen Flamsteed'schen Projection.

157) Die Projection, welche wir nun beschreiben werden, ist zuerst von dem Astronomen Flamsteed gebraucht worden und erhält von ihm ihren Namen.

Um sie zu construiren, wählt man sich in dem Lande, dessen Charte man haben will, einen Meridian $A\alpha$ Fig. XLVIII, welcher ohngefähr durch die Mitte der Charte geht. Diesen mittleren Meridian entwickelt man auf eine gerade Linie $A\alpha$ Fig. XLVII, so daß die Stücke dieser geraden Linie die nämliche Größe wie die gleichbezeichneten Bogen Fig. XLVIII. haben.

Die Parallelkreise werden dann ebenso auf gerade Linien ΘM, ηR, ... entwickelt, welche alle auf $A\alpha$ senkrecht stehen. Wenn nun ΘL, ηR, εS.... Fig. XLVII. den gleichbezeichneten Bogen in Fig. XLVIII. gleich sind, so wird die krumme Linie, welche durch die Puncte A, L, R, S, T....D Fig. XLVII. geht, den Meridian ALR...D Fig. XLVIII. andeuten.

158) Um dergleichen Meridiane construiren zu können, muß man ihre Eigenschaften kennen; wir wollen deswegen die Gleichung eines Meridians auf der Charte suchen, und nehmen dazu die Achse der x in $A\alpha$ und den Anfangspunct der Coordinaten in A an.

Die Breite des Fußes der Ordinate heiße λ; die Länge des zu betrachtenden Meridians von dem Meridiane $A\alpha$ her, sei p. Dann ist die Ordinate immer gleich $pR\cos\lambda$, wo R den Krümmungshalbmesser des Meridians, im Puncte, dessen Breite λ ist, ausdrückt, und p in Theilen des Radius genommen ist. Nimmt man daher p in Secunden an, so ist $y = p \sin 1''. R \cos\lambda$.

In der gegenwärtigen Untersuchung wollen wir die Erde sphärisch annehmen; dann ist die Abscisse $x = R(90^\circ - \lambda) \sin 1''$, wo $90^\circ - \lambda$ in Secunden angegeben seyn muß.

Digitized by Google

Es ist also $90^\circ - \lambda = \frac{x}{R \sin 1''}$ und folglich $y = Rp \sin 1'' \sin \frac{x}{R \sin 1''}$ die verlangte Gleichung des Meridians.

159) Aus dieser Gleichung sieht man, daß die Meridiane keine gerade Linien sind. Ist EN eine Tangente an den Meridian ME, so ist die tang. des Winkels PNE gleich $\frac{dy}{dx}$, also tang. $PNE = p \sin 1'' \cdot \cos \frac{x}{R \sin 1''}$ *), oder wenn λ die Breite des Punctes E ist, tang $PNE = p \sin 1'' \sin \lambda$.

160) Wir wollen die Größe der Linie MN zu berechnen suchen.

Der Unterschied der Breiten der Puncte E und M in Secunden heiße Δ, so ist $PN = \Theta\alpha = R\Delta \sin 1''$, und $PE = PN \text{ tang } PNE = Rp\Delta \sin^2 1'' \sin \lambda$; ferner ist $\alpha E = Rp \sin 1'' \cos \lambda$, also $\alpha P = \Theta N = \alpha E - PE = Rp \sin 1'' (\cos \lambda - \Delta \sin 1'' \sin \lambda)$. Nun ist $\Theta M = Rp \sin 1'' \cos (\lambda + \Delta) = Rp \sin 1'' (\cos \lambda \cos \Delta - \sin \lambda \sin \Delta)$; setzt man Δ sehr klein, so daß $\cos \Delta = 1 - \frac{\Delta^2 \sin^2 1''}{2}$ und $\sin \Delta = \Delta \sin 1''$ seyn kann, so ist

$\Theta M = Rp \sin 1'' \left(\cos \lambda - \sin \lambda \cdot \Delta \sin 1'' - \cos \lambda \cdot \frac{\Delta^2 \sin^2 1''}{2} \right)$, also

$\Theta N - \Theta M = MN = \frac{Rp \cos \lambda \cdot \Delta^2 \sin^3 1''}{2}$. Die Linie MN steht also bei gleichen Δ und λ mit p in Proportion.

161) Wir sind nun im Stande, alle Aufgaben, welche bei der Anfertigung einer Charte nach der gegenwärtigen Projection vorkommen, zu lösen. Um eine Uebersicht dieser Aufgaben zu erhalten, ist Folgendes:

Fig. XLIX. stellt die ganze Charte vor; NS ist der mittlere Meridian; die stärker gezogenen Linien sind die Meridiane und Parallelkreise; die schwächeren sind diejenigen, wodurch die Charte in Blätter (153) getheilt ist. Diese Blätter sind Rechtecke, deren Seiten mit dem mittleren Meridiane und den Parallelkreisen parallel sind. Alle haben gleiche Dimensionen.

---

*) Man sollte glauben $dy = Rp \sin 1'' \times \frac{dx}{R \sin 1''} \cos \frac{x}{R \sin 1''}$; aber es ist $d \cdot \sin x = dx \cos x$, wo dx in Theilen des Radius ausgedrückt seyn muß, und folglich mit $\sin 1''$ multiplizirt wird.

Digitized by Google

Beim Anblicke der Figur, und mit Rücksicht auf dasjenige, was wir (153) gesagt haben, erfährt man leicht, daß folgende Aufgaben aufzulösen sind.

1) Wie zeichnet man einen Meridian auf die Charte und die einzelnen Blätter?

2) Wie zeichnet man Parallelkreise auf die Charte?

3) Wie bestimmt man die Lage eines Punctes, dessen Länge und Breite gegeben sind, auf der Charte und auf den einzelnen Blättern?

162) Die Meridiane sind krumme Linien, welche man nicht anders als durch Puncte zu construiren weiß. Wenn man von diesen Puncten so viele bestimmt hat, daß sie auf der Charte nahe bei einander liegen, so kann man die Meridiane mit Hülfe eines biegsamen Linials, dessen Gebrauch sehr einfach ist, ziehen. Dieses kann aber doch nur Statt haben, wenn die Charte in einem sehr kleinen Maaßstabe gezeichnet ist, indem man sonst gar zu viele Puncte bestimmen müßte, wenn sie nahe genug bei einander liegen sollten. In keinem Falle ist das Verfahren anzuwenden, um auf die einzelnen Blätter Meridiane zu zeichnen.

Man löset daher die erste unserer Aufgaben auf, indem man genug Puncte der Meridiane bestimmt, damit man jedesmal den Theil des Meridians, welcher zwischen zwei aufeinander folgenden Puncten liegt, als eine gerade Linie betrachten könne. Wir stellen demnach die Frage auf, wie nahe bei einander hierzu die Puncte seyn müssen?

Wir können den Theil ME des Meridians AME Fig. XLVII. offenbar als gerad ansehen, wenn die Linie MN klein genug ist, damit sie nach dem Maaßstabe, in welchem die Charte gezeichnet wird, nicht mehr aufgetragen werden könne.

Aus (160) ist $MN = \frac{R\,p\cos\lambda\,.\,\Delta^2\sin^3 1''}{2}$, folglich $\Delta^2 = \frac{2\,.\,MN}{R\,.\,p\,.\cos\lambda\sin^3 1''}$.

Sind also λ und p gegeben, so kann man sehen, wie klein man Δ nehmen müsse, das heißt, wie nahe die Puncte M und E seyn müssen, damit MN nur eine bestimmte Größe habe. Es sei z. B. $\lambda = 50°$, p betrage höchstens $3° = 10800''$; dann ist . . . . . $\Delta^2 = \frac{2\,.\,MN}{R\,.\,10800\,.\cos 50°\,.\sin^3 1''}$. Wenn die Charte im Maaßstabe von $\frac{1}{50000}$ gezeichnet wird, so ist 1 Met. nicht mehr merklich. Es darf also MN = 1 Met. und folglich $\Delta^2 = \frac{2}{R\,.\,10800\,.\cos 50°\,.\sin^3 1''}$ seyn. Hieraus rechnet man:

Digitized by Google

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$-\log R = \bar{7}{,}19612$$
$$-\log 10800 = \bar{5}{,}96658$$
$$-\log \cos 50^\circ = 0{,}19193$$
$$-3\log \sin 1'' = 15{,}94327$$
$$2\log \Delta = 5{,}59893$$
$$\log \Delta = 2{,}79946. \quad \Delta = 630'' = 10', 30''.$$

Im gegenwärtigen Falle könnte man also die Parallelkreise von 10′ zu 10′ ziehen, um die Meridiane durch eine Reihe von geraden Linien zu beschreiben.

163) Die einzelnen Blätter werden selten in einem kleinern Maaßstabe als $\frac{1}{20000}$ aufgenommen, in welchem 1 Met. schon bemerkt werden kann; da aber die Meridiane auf den Blättern nur zum Gebrauche der Bouſſole dienen, und dieſe ein sehr unvollkommenes Instrument ist, so kann ein kleiner Irrthum in der Richtung eines Meridians auf einem Blatte gar nicht in Anschlag gebracht werden, weshalb die obige Bestimmung von Δ noch vollkommen auf die Blätter anzuwenden ist.

164) Es ist willkürlich, wie weit man die Meridiane auf der Charte von einander zieht; sie müssen desto näher seyn, je genauer man auf derselben die geographische Länge eines Punctes erkennen will.

Wenn aber die Meridiane auf den Blättern zur Aufnahme mit der Bouſſole dienen sollen, so müssen sie nahe genug seyn, damit man alle diejenigen, welche zwischen zwei auf einander folgenden liegen, als parallel annehmen könne; und dieses erfordert, daß die Richtungen zweier auf einander folgenden Meridiane nur um einen Winkel verschieden seien, welcher den Irrthümern der Bouſſole nicht gleich kömmt.

Nennt man den Winkel, welchen der Meridian ME mit dem Parallelkreise αE macht, $90^\circ - \alpha$, so ist $\text{tang}\,\alpha = p \sin 1'' \sin\lambda$ nach (159). Wächst p um Δp und α um $\Delta\alpha$, so wird: $\Delta\alpha = \Delta p \sin\lambda \cos^2\alpha$, wenn man nur die ersten Potenzen von $\Delta\alpha$ und Δp beibehält. Daraus ist $\Delta p = \frac{\Delta\alpha}{\sin\lambda \,.\, \cos^2\alpha}$; α ist ein kleiner Winkel, wenn, wie vorhin, p nicht über 3° geht; also ist Δp sehr nahe $= \frac{\Delta\alpha}{\sin\lambda}$.

Hier zeigt nun $\Delta\alpha$ die Veränderung in den Richtungen der Meridiane für einen Längenunterschied Δp an.

Digitized by Google

Unterstellt man, daß die Boussole die Winkel höchstens bis auf 8′ genau angebe, so kann $\Delta\alpha$ wohl 8′, und folglich $\Delta p = \frac{8'}{\sin\lambda}$ seyn. Ist wie vorhin $\lambda = 50°$, so wird $\Delta p = 10', 45''$, so daß es dann hinreichend genau ist, die Meridiane von 10′ zu 10′ zu ziehen.

165) Nachdem man durch die Methode des vorhergehenden §. gefunden hat, wie weit die Parallelkreise und Meridiane von einander gezogen werden sollen, wird das Weitere wie bei der modificirten Flamsteed'schen Projection verrichtet.

166) Die ursprüngliche Flamsteed'sche Projection hat mehrere Nachtheile, weshalb sie nur selten gebraucht wird. Der größte besteht in den starken Abweichungen der Figuren auf der Charte von ihrer wirklichen Gestalt. Um dieses zu begreifen, bedenke man, daß der Winkel, den wir (164) α nannten, in der Wirklichkeit α ist; auf der Charte aber hat man $\tang\alpha = p \sin 1'' \sin\lambda$. Ist nun $p = 3°$, so ist $\tang\alpha = 10800 \sin 1'' \sin\lambda$, woher $\alpha = 2°, 18'$ wird; für $p = 1°$ wäre $\alpha = 46'$; so große Differenzen in der Richtung können in der Detail-Aufnahme bei weitem nicht gedultet werden. Die Puncte, welche nach der gegenwärtigen Projection in einigermaßen großer Entfernung vom mittleren Meridiane aufgetragen werden, können daher nicht mehr zur Verification dienen.

Dagegen hat diese Projection den Vortheil, daß alle Flächeninhalte auf der Charte die nämlichen sind wie auf der Erde. Der Beweis hiervon ist mit dem in (173) vollkommen ähnlich.

Von der modificirten Flamsteed'schen Projection.

167) Die modificirte Flamsteed'sche Projection, besitzt die Vortheile der vorigen, und hat ihre Nachtheile in weit geringerem Grade. Wir wollen Alles, was auf dieselbe Bezug hat, mit der größten Ausführlichkeit darstellen, indem wir diese Projection für die zweckmäßigste unter allen halten. Die Construction derselben ist folgende:

Man wählt sich auf der Charte einen Punct, welcher ohngefähr in der Mitte derselben liegt. Der Meridian dieses Punctes wird der mittlere Meridian und sein Parallelkreis der mittlere Parallelkreis genannt. Fig. L. sei C dieser Punct, PCD der mittlere Meridian, PP′ die Erdachse und CB eine Tangente. Man entwickele den mittleren Meridian, wie in der vorigen Projection, auf eine gerade Linie BCD Fig. LI., wo C den gewählten Punct C Fig. L. bezeichnet. Auf dieser Linie nehme man von C her eine Länge CB = CB Fig. L. Will man nun irgend einen Parallelkreis DG Fig. L. in der Projection bestimmen, so nehme man CD Fig. LI. gleich dem Bogen

Digitized by Google

CD Fig. L.; beschreibe dann aus B mit dem Radius BD einen Kreisbogen DR, auf welchen der Parallelkreis DG von D aus nach beiden Seiten hin entwickelt wird. Die Construction der Meridiane ergiebt sich dann von selbst.

Wir wollen nun die Theorie der gegenwärtigen Projection zuerst für den Fall geben, wo man die Erde sphärisch annimmt.

168) In Fig. LI. bezeichnet nn'L einen Meridian; Bn'K eine gerade Linie; mn'L eine Tangente an den Meridian nn'L, und n'L ein Element desselben, so daß DE unendlich klein ist; Cm ist der mittlere Parallelkreis.

Die Breite des Punctes C heiße λ; die von D sei $\lambda - \Delta\lambda$, so daß CD, $\Delta\lambda$ Secunden enthält. Der Längenunterschied des Meridians nn'L und des mittleren sei p. Der Breitenunterschied der Puncte D und E sei in Secunden $d\lambda$.

Wir werden in der Folge, wenn wir eine Linie in Längenmaaß ausgedrückt in Rechnung bringen, den Buchstaben l unten an dieselbe setzen; so bedeutet $\underset{1}{\Delta\lambda}$ den Bogen $\Delta\lambda$ entwickelt, und ist also $= \underset{1}{CD}$. Wo dieses Zeichen nicht steht, ist die Linie in Secunden ausgedrückt.

Wir wollen nun alle hierher gehörende Aufgaben der Reihe nach auflösen.

$\underset{1}{\Delta\lambda}$, $\underset{1}{Cn}$, $\underset{1}{Dn'}$, $\underset{1}{EL}$ und dann Cn, Dn', EL zu bestimmen.

Es ist $\underset{1}{\Delta\lambda} = R \cdot \Delta\lambda \cdot \sin 1''$ und ebenso: $\underset{1}{d\lambda} = R\, d\lambda \sin 1''$.

Die Längen der Linien Cn, Dn', EL sind die nämlichen wie auf der Kugel; daselbst ist der Radius von Cn gleich $R\cos\lambda$, der von $Dn' = R\cos(\lambda - \Delta\lambda)$, der von $EL = R\cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)$.

In Secunden sind alle diese Linien auf der Kugel $= p$, folglich ist $\underset{1}{Cn} = pR\cos\lambda \sin 1''$, $\underset{1}{Dn'} = pR\cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin 1''$, $\underset{1}{EL} = pR\cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)\sin 1''$. Um Cn, Dn', EL auf der Charte in Secunden zu finden, weiß man, daß der Radius von Cn gleich $CB = R\cot\lambda$ ist; der Radius von Dn' ist also $= R\cot\lambda + \underset{1}{\Delta\lambda}$; der von $EL = R\cot\lambda + \underset{1}{\Delta\lambda} + \underset{1}{d\lambda}$. In Secunden sind also auf der Charte

$$Cn = \frac{pR\cos\lambda \sin 1''}{R\cot\lambda \sin 1''} = p\sin\lambda,$$

$$Dn' = \frac{pR\cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin 1''}{(R\cot\lambda + R\Delta\lambda \sin 1'')\sin 1''} = \frac{p\,.\cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''}.$$

$$EL = \frac{p\cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)}{\cot\lambda + (\Delta\lambda + d\lambda)\sin 1''}.$$ Wir bemerken, daß Θ (Fig. LI.) $= Dn'$ ist.

Digitized by Google

169) EK_1 und LK_1 zu berechnen.

$$LK_1 = EK_1 - EL_1, \quad EK_1 = BE_1 . \Theta \sin 1'' = R\left(\cot\lambda + (\Delta\lambda + d\lambda)\sin 1''\right)\Theta \sin 1''.$$

$$LK_1 = \frac{R\left(\cot\lambda + (\Delta\lambda + d\lambda)\sin 1''\right) p \cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin 1''}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - R\,p\cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)\sin 1''.$$

Wenn man beobachtet, daß $\cos d\lambda = 1$ und $\sin d\lambda = d\lambda \sin 1''$ ist, so wird:

$$LK_1 = R.p.\cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin 1'' + \frac{R.d\lambda.p.\cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin^2 1''}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - R\,p\cos(\lambda - \Delta\lambda)\sin 1''$$

$$- R\,p.\sin(\lambda - \Delta\lambda).d\lambda.\sin^2 1'' =$$

$$= R\,p.d\lambda.\sin^2 1''\left\{\frac{\cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - \sin(\lambda - \Delta\lambda)\right\}.$$

170) Den Winkel $Ln'K$ zu finden. $\operatorname{tang} Ln'K = \frac{LK_1}{n'K_1}$;

$$n'K_1 = DE_1 = R\,d\lambda \sin 1''; \text{ also } \operatorname{tang} Ln'K =$$

$$= \frac{R\,p\,d\lambda \sin^2 1''\left\{\frac{\cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - \sin(\lambda - \Delta\lambda)\right\}}{R\,d\lambda \sin 1''} =$$

$$= \frac{p \sin 1''\left\{\cos(\lambda - \Delta\lambda) - \sin(\lambda - \Delta\lambda)\left(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''\right)\right\}}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''}.$$

Für $\Delta\lambda = o$ ist dieser Werth $= o$; also stehen alle Meridiane auf dem mittleren Parallelkreise senkrecht, woraus schon folgt, daß die Gestalten der Figuren durch die gegenwärtige Projection bei weitem nicht so viel verändert werden, als durch die vorige.

170) bis. $rn'P$ sei eine geodätische Linie auf der Charte; in der Figur (LI bis.) bedeute $r_1n'_1P_1$ die nämliche Linie auf der Kugel; r_1L_1 sei ein Bogen des Parallelkreises, welcher in EK projicirt ist und n'_1L_1 bezeichne den Meridian von n'_1. Der nordöstliche Azimuth der Linie n'_1P_1, welchen wir V nennen ist dann gleich $r_1n'_1L_1$ und das Dreieck $r_1n'_1L_1$ muß als ein geradliniges betrachtet werden, weil seine Seiten unendlich klein seyn sollen.

Der nordöstliche Azimuth der Linie $n'P$ auf der Charte ist $n''n'P = rn'L$; er heiße V'. Wir wollen uns damit beschäftigen $V' - V$ zu berechnen.

Digitized by Google

Es ist $\text{tang } V = \frac{r_{,} L_{,}}{n'_{,} L_{,}}$ und $V' = r n' K - L n' K$. Man setze $\text{tang } L n' K = x$ und $r n' K = V_{,}$, so wird $\text{tang } V' = \frac{\text{tang } V_{,} - x}{1 + x \text{ tang } V_{,}}$ oder:

$\text{tang } V' = (\text{tang } V_{,} - x)(1 - x \text{ tang } V_{,}) = \text{tang } V_{,} - \frac{x}{\cos^2 V_{,}}$ wobei man alle höhere Potenzen von x vernachläßigte.

Nach dem Wesen der gegenwärtigen Projection ist nun $r_{,} L_{,} = r L$ und $n'_{,} L_{,} = n' K$; also $\text{tang } V = \frac{r_{,} L_{,}}{n'_{,} L_{,}} = \frac{r L}{n' K} = \frac{r K - L K}{n' K} = \frac{r K}{n' K} - \frac{L K}{n' K} = \text{tang } V_{,} - x$. Hieraus folgt $\text{tang } V' - \text{tang } V = x - \frac{x}{\cos^2 V_{,}} = -x \text{tang}^2 V_{,}$. Da nun $\text{tang } V' - \text{tang } V = \frac{\sin (V' - V)}{\cos V' \cos V}$ ist, so wird: $\sin (V' - V) = -x \text{ tang}^2 V_{,} \cos V_{,} \cos V$. Allein die Größen V, V', $V_{,}$ sind nur durch Glieder, welche x als Factor enthalten, verschieden; man kann also, da höhere Potenzen von x ausbleiben, auch

$$V' - V = -\frac{x \text{ tang}^2 V \cos^2 V}{\sin 1''} = -\frac{x \sin^2 V}{\sin 1''} \text{ schreiben.}$$

Wenn man den Werth von x, welchen der vorige §. giebt, nach den Potenzen von $\Delta\lambda$ entwickelt, so findet man, daß $x = p \cdot \Delta\lambda \cdot \sin^2 1''$ ist, wo nur $\Delta\lambda^3$ und höhere Potenzen weggelassen sind. Endlich ist also:

$$V' = V - p \Delta\lambda \cos\lambda \sin^2 V \sin 1''.$$

Nach dieser Formel kann man aus dem bekannten wahren Azimuthe einer geodätischen Linie, den Azimuth, welchen sie auf der Charte hat, berechnen. Auch wird es möglich seyn, aus dem wirklichen Winkel zweier Linien ihren Winkel auf der Charte zu finden, wenn man die Azimuthe dieser Linien nur ohngefähr kennt. Denn es seien V, W die ohngefähren nordöstlichen Azimuthe, welche zwei geodätische Linien mit dem Meridiane ihres Durchschnittspunctes bilden; α sei ihr Winkel. V', W', α' mögen die Projectionen von V, W, α bedeuten. Dann ist nach dem Vorhergehenden:

$V' = V - p \Delta\lambda \cos\lambda \sin^2 V \sin 1''$

$W' = W - p \Delta\lambda \cos\lambda \sin^2 W \sin 1''$ und also weil $\alpha = W - V$ und $\alpha' = W' - V'$

$\alpha' = \alpha + p \Delta\lambda \cos\lambda \sin 1'' (\sin^2 V - \sin^2 W)$ oder

$\alpha' = \alpha - p \Delta\lambda \cos\lambda \sin 1'' \sin\alpha \sin (2V + \alpha)$. Da der letzte Factor mit der sehr

Digitized by Google

kleinen Größe $p\Delta\lambda \sin 1''$ multiplizirt ist, so wird eine angenäherte Kenntniß von V hinreichend seyn, um die Correction zu berechnen.

Der größte Werth dieser Correction ist $p\Delta\lambda \sin 1'' \cos\lambda$. Setzt man $\lambda = 45°$, $p = 5°$, $\Delta\lambda = 5°$, so wird sie gleich $18',32''$; für $p = \Delta\lambda = 2°,30'$ wäre sie $4',37''$.

171) Fig. LIII. sei MABN irgend ein Parallelkreis auf der Charte, E sein Centrum, A und B zwei nahe liegende Puncte, deren Längenunterschied Δp sei. Die Breite des Kreises MABN heiße $\lambda - \Delta\lambda$; AF und BG sind Tangenten an die Meridiane der Puncte A und B, und AC, BC sind Tangenten an MABN. Man verlangt den Winkel der Linien FA, GB, welchen wir x' nennen.

Nach dem vorigen §. ist $\text{tang FAE} = p \sin 1'' \left(\frac{\cos(\lambda - \Delta\lambda')}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - \sin(\lambda - \Delta\lambda)\right)$

und $\text{tang GBE} = (p + \Delta p) \sin 1'' \left(\frac{\cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - \sin(\lambda - \Delta\lambda)\right)$.

Da nun FAE und GBE klein sind, so setze man $\text{tang FAE} = \text{FAE} \sin 1''$, $\text{tang GBE} = \text{GBE} \sin 1''$; dann wird: $\text{GBE} - \text{FAE} = \Delta p \left(\frac{\cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''} - \sin(\lambda - \Delta\lambda).\right)$

Nun ist $x' + \text{FAC} + \text{GBC} + \text{ACB} = 360°$ und $\text{FAC} = 90° - \text{FAE}$, $\text{GBC} = 90° + \text{GBE}$, $\text{ACB} = 180° - \text{AEB}$, also $x' = \text{AEB} - \text{GEB} + \text{FAE}$; hier ist $\text{AEB} = \frac{\Delta p \cos(\lambda - \Delta\lambda)}{\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1''}$, also $x' = \Delta p \sin(\lambda - \Delta\lambda)$.

172) Die Abweichung des Meridians $nn''n'$ (Fig. LI.) von der Tangente zu berechnen.

Die Breite des Parallelkreises $D'm''$ sei $\lambda - \Delta\lambda'$. Die Abweichung des Meridians von der Tangente ist $n''m'' = D'_1 m'' - D'_1 n'' = D'_1 o'' + o''_1 m'' - D'_2 n''$. Der Winkel $o''n'm'' = Ln'K$ heiße α; so ist sehr nahe $o''_1 m'' = o''_1 n' . \text{tang}\,\alpha = (\Delta\lambda - \Delta\lambda') \sin 1'' R \,\text{tang}\,\alpha$.

$D'_1 o''$ ist $= R\,(\cot\lambda + \Delta\lambda' \sin 1'')\,\Theta \sin 1''$, $D'_1 n'' = Rp \cos(\lambda - \Delta\lambda') \sin 1''$; setzt man $\Delta\lambda - \Delta\lambda' = \partial\lambda$ und behält in der Rechnung von diesem $\partial\lambda$ nur die erste und zweite Potenz bei, so ist:

$o''_1 m'' = \partial\lambda \sin 1'' \,.\, R \,.\, \text{tang}\,\alpha$; $D'_1 o'' = R\,(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'')\,\Theta \sin 1'' - R\,\partial\lambda \sin^2 1'' \,.\, \Theta$;

$D'_1 n'' = \left\{Rp \cos(\lambda - \Delta\lambda)\left(1 - \frac{\partial\lambda^2 \sin^2 1''}{2}\right) - Rp \sin(\lambda - \Delta\lambda)\,\partial\lambda \sin 1''\right\} \sin 1''$;

Digitized by Google

$$D'o''_1 - D'n''_1 = -Rp\,\delta\lambda\,\sin^2 1''\left\{\frac{\cos(\lambda-\Delta\lambda)}{\cot\lambda+\Delta\lambda\sin 1''} - \sin(\lambda-\Delta\lambda)\right\} + \frac{Rp\,\delta\lambda^2\cos(\lambda-\Delta\lambda)\sin^3 1''}{2}$$

Hieraus wird $D'o''_1 - D'n''_1 + o''m''_1 = \frac{Rp\,\delta\lambda^2\cos(\lambda-\Delta\lambda)\sin^3 1''}{2} = n'm''_1$.

Um dieſe Größe einigermaaßen zu ſchätzen, ſei $\lambda - \Delta\lambda = 45°$, $p = 1° = 3600''$, $\delta\lambda = 10' = 600''$. Dann findet man:

$n''m''_1 = 0{,}33$ Met.; für $p = 5°$ iſt $n''m''_1 = 1{,}6$ Met., für $p = 10°$, $n''m''_1 = 3{,}3$ Met.

172) bis. So wie wir eben die Abweichung des Meridianes von der Tangente berechnet haben, können wir auch finden, wie weit die geodätiſche Linie Pn', deren nordöſtlicher Azimuth auf der Kugel, wie in (170 bis), V heiße, von der Tangente $n'Q$ abſteht. Unter dieſem Abſtande verſtehen wir nämlich das Perpendikel PN, welches man aus dem Endpuncte P der Linie $n'P$ auf die gerade $n'Q$ fällt.

Um unſere Aufgabe zu löſen ſei (Fig. LI bis) $P_1n''_1$ der Parallelkreis von P_1 und $An''_1n'_1$ der Meridian von n'_1. Dann iſt $P_1n''_1 = Pn''$ und dieſe Linie ſoll zuerſt berechnet werden.

Die Breite von n'_1 heiße wie früher: $\lambda - \Delta\lambda$ oder auch λ_1

Die gemeinſchaftliche Breite von P_1 und n''_1 heiße . . . $\lambda - \Delta\lambda'$

Der Winkel $P_1An''_1$ ſei . . . . . A

Die Linie $P_1n'_1$ in Metern nenne man . . . . . S.

Es werden dann in der Rechnung, welche wir vorhaben, folgende kleine Größen vorkommen, nämlich: $\frac{S}{R}$, $p\sin 1''$, $\Delta\lambda\sin 1''$, und wir ſtellen feſt, daß kein Glied, wo 4 Factoren von den ebengenannten ſtehen, beibehalten werde, auch, daß man die Glieder mit $\frac{S^3}{R^3}$ weglaſſe. Dieß vorausgeſetzt, nehme man die Formeln in (93), welche geben

$$A = \frac{S}{R\sin 1''}\cdot\frac{\sin V}{\cos\lambda_1} + \frac{S^2}{R^2\sin 1''}\cdot\frac{\sin V\cos V\tang\lambda_1}{\cos\lambda_1}.$$

$$\lambda - \Delta\lambda' = \lambda_1 + \frac{S\cos V}{R\sin 1''} - \frac{S^2}{R^2\sin 1''}\cdot\frac{\sin^2 V\tang\lambda_1}{2}.$$

Nun iſt aber offenbar $P_1n''_1 = R.A\sin 1''\cos\lambda_1$, weil $R\cos\lambda_1 = MP_1$ und $A = n_1MP_1$ iſt. Hieraus findet man durch Subſtitution der Werthe von A und λ_1:

$$P_1n''_1 = S\sin V \text{ und folglich auch } Pn'' = S\sin V.$$

Digitized by Google

Wir müssen nun Po″ haben; aber aus (172) ist

$o''n'' = R\,\delta\lambda \,.\, x \sin 1'' - \frac{R\,p\,\delta\lambda^2 \cos\lambda_{,} \sin^3 1''}{2}$ wo x den Werth aus (170 bis) hat. Das $\delta\lambda$ ist hier $(\lambda - \Delta\lambda' - \lambda_{,})$ von welcher Größe nur das Glied $\frac{S\cos V}{R \sin 1''}$ beibehalten wird, da $\delta\lambda$ mit x multiplicirt ist. Demnach wird $o''n'' = Sx\cos V - \frac{p\,S^2 \cos^2 V \cos\lambda_{,} \sin 1''}{2R}$. Addirt man nun o″n″ zu Pn″, so erhält man:

$Po'' = S \sin V + Sx \cos V - \frac{p\,S^2 \cos^2 V \cos\lambda_{,} \sin 1''}{2R}$.

Man nenne den Winkel PBo″, $\Theta_{,}$ in Theilen des Radius; die Linie Bo″=BP heiße r, und man erinnere sich, daß $Qn'o'' = V_{,}$ ist, so wird man finden, daß das Perpendikel $PN = \cos V_{,} \left\{ r\Theta_{,} - \tang V_{,} \left(\frac{r\Theta_{,}^2}{2} + o''n' \right) \right\}$ ist.

Nun ist aber $r\Theta_{,} = Po''$ und demnach $r\Theta_{,}^2 = \frac{S^2 \sin^2 V}{r}$; ferner $r = R(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'')$ also $r\Theta_{,}^2 = \frac{S^2 \sin^2 V}{R(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'')} = \frac{S^2}{R} \sin^2 V \tang\lambda (1 - \Delta\lambda \tang\lambda \sin 1'')$ und folglich: $\frac{\Theta_{,}^2}{2} = \frac{S^2}{2R} \sin^2 V \tang\lambda - \frac{S^2 \,.\, \Delta\lambda \,.\, \sin^2 V \tang^2\lambda \sin 1''}{2R}$. Wir haben auch:

$o''n' = R(\lambda - \Delta\lambda' - \lambda_{,}) = S\cos V - \frac{S^2}{2R} \sin^2 V \tang\lambda$. Also

$o''n' + \frac{r\Theta_{,}^2}{2} = S\cos V - \frac{S^2 \Delta\lambda \,.\, \sin^2 V \tang^2\lambda \sin 1''}{2R}$. Nun ist (170 bis)

$\tang V_{,} = \tang V + x$, woher:

$\left(o''n' + \frac{r\Theta_{,}^2}{2} \right) \tang V_{,} = S \sin V + Sx \cos V - \frac{S^2 \,.\, \Delta\lambda \,.\, \sin^2 V \tang V \tang^2\lambda \sin 1''}{2R}$.

Da nun $r\Theta_{,} = Po'' = S \sin V + Sx \cos V - \frac{p\,S^2 \cos^2 V \cos\lambda_{,} \sin 1''}{2R}$ ist, und man in dem letzten Gliede $\lambda_{,} = \lambda$ setzen darf, so wird:

$r\Theta_{,} - \left(o''n' + \frac{r\Theta_{,}^2}{2} \right) \tang V_{,} = \frac{S^2}{2R} \sin 1'' (\Delta\lambda \sin^2 V \tang V \tang^2\lambda - p \cos^2 V \cos\lambda)$

und endlich $PN = \frac{S^2}{2R} \sin 1'' (\Delta\lambda \sin^3 V \tang^2\lambda - p \cos^3 V \cos\lambda)$.

Macht man hier $V = o$, so gilt die Formel für einen Meridian. PN erscheint dann mit dem Zeichen —, woraus wir sehen, daß in der Stellung, welche PN auf unserer

Digitized by Google

Figur hat, dieſe Größe immer das Zeichen — haben werde. Man kann ſich hierüber die allgemeine Regel auff [illegible]: wenn PN das Zeichen — hat, ſo liegt die krumme Linie zwiſchen den Schenkeln des nordöſtlichen Winkels der Tangente mit dem Meridiane; hat PN das Zeichen +, ſo liegt die Tangente in dem nordöſtlichen Winkel der geodätiſchen Linie mit dem Meridiane. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß dieſes von dem Theile der Charte gilt, welcher öſtlich vom mittleren Meridiane liegt; für den weſtlichen Theil wäre nordweſtlich, was hier nordöſtlich iſt.

So lange die beiden Größen in der Parentheſe nicht einerlei Zeichen haben, iſt immer $PN < \frac{S^2}{2R} \sin 1'' \Delta\lambda \tang^2 \lambda$ oder $PN < \frac{S^2}{2R} \sin 1'' . p . \cos \lambda$. Haben aber dieſe Größen das nämliche Zeichen, ſei es dadurch, daß $V > 90°$ iſt, ſei es weil $\Delta\lambda$ negativ wird, ſo erhält PN ſeinen größten Werth für $\tang V = -\frac{p \cos \lambda}{\Delta\lambda \tang^2 \lambda}$. Wir haben alſo drei größte Werthe von PN. Berechnen wir dieſelben, ſo können wir gewiß ſeyn, daß PN nie den größten unter ihnen erreicht. Setzt man $\lambda = 45°$, $S = 20000$ Met. und $\Delta\lambda = 10°$, $\Delta p = 10°$, ſo werden die drei größten PN der Ordnung nach: 5,58 Met.; 3,84 Met.; 4,00 Met. Wir können alſo ſchließen, daß in der ſehr großen Entfernung von 10° vom mittleren Meridiane oder Parallelkreiſe, doch in einer geodätiſchen Linie von 20000 Met., nie die Tangente um 5 Met. von der wahren Linie abweicht. Für eine halb ſo große Linie wäre die Abweichung 4mal kleiner.

Wenn man, wie es hier ohne Anſtand geſchehen kann, die krumme Linie Pn' als einen Bogen ihres Krümmungskreiſes betrachten will, ſo kann man ihren Radius, welcher r, heiße, finden. Er wird gleich $\frac{S^2}{2PN}$ ſeyn.

Für die größte Entfernung der Sehne von der krummen Linie erhält man $\frac{PN}{4}$.

Der Winkel der Tangente mit der Sehne wird $\frac{PN}{S . \sin 1''}$. Im obigen Beiſpiele beträgt er 51″.

173) Wenn die Puncte S und n' unendlich nahe bei einander liegen, und Su iſt der Meridian von S, ſo bedeutet SuLn' jedes Element eines Flächeninhaltes auf der Charte. Da nun die Dreiecke SuT, n'LK unendlich Kleine von der zweiten Ordnung ſind, ſo iſt

Digitized by Google

$SuLn' = STKn'$, und, weil man $Sn' = TK$ setzen muß, ist $Sn'TK = Sn'_1 \times ST_1$. Um Sn'_1 zu finden, muß man Dn'_1 nach p differentiiren; dann wird:

$Sn'_1 = dp \,.\, R \cos(\lambda - \Delta\lambda) \sin 1''$; aber $ST_1 = R\, d\lambda \,.\, \sin 1''$, also

$Sn'TK = R^2 \,.\, dp \,.\, d\lambda \,.\, \cos(\lambda - \Delta\lambda) \sin^2 1''$. Es ist sehr leicht einzusehen, daß dieser Werth auch zugleich derjenige des Elementes der Kugelfläche ist, welches dem $Sn'TK$ correspondirt, woher es sich ergiebt, daß alle Flächeninhalte auf der Projection die nämlichen wie auf der Kugel sind.

174) Wenn die Charte nicht in einem sehr kleinen Maaßstabe gezeichnet wird, so fällt das gemeinschaftliche Centrum der Parallelkreise so weit weg, daß es viele Schwierigkeiten haben würde diese Parallelkreise mit dem Cirkel zu beschreiben. Um dieser Beschwerde abzuhelfen, dient die Auflösung folgender Aufgabe, welche man sowohl zur Bestimmung der Durchschnittspuncte der Meridiane und Parallelkreise, als auch jedes Punctes des trigonometrischen Netzes anwendet.

Fig. LII. bedeutet BN den mittleren Parallelkreis; die Tangente BX an denselben bildet mit dem mittleren Meridiane CY ein System rechtwinkeliger Achsen, worin jeder Punct M durch seine Abscisse MP und Ordinate $MO = BP$ bestimmt werden soll.

Wenn die Breite des Punctes M gegeben ist, so kennt man auch BK; es sei $= \Delta\lambda$. Der Längenunterschied von M und B sei p. Wenn K zwischen C und B läge, so wäre $\Delta\lambda$ negativ.

Es ist offenbar $MP = x = CM \,.\, \sin\Theta = R(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'') \sin\Theta$ und

$CP = R \cot\lambda + y = CM \,.\, \cos\Theta = R \cos\Theta (\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'')$, also:

$$y = R(\cot\lambda + \Delta\lambda \sin 1'') \cos\Theta - R \cot\lambda = R\left(\cos\Theta\, \Delta\lambda \sin 1'' - 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cot\lambda\right);$$

Θ ist bekannt aus (168).

175) Wir werden nun alles, was wir über die modificirte Flamsteed'sche Projection gesagt haben, in der Unterstellung, daß man die Abplattung der Erde beachten wolle, wieder durchgehen, und sehen, welche Veränderungen darin zu machen sind.

Um CD_1 (Fig. LI.) zu finden, kennt man die Breiten der Endpuncte dieses Meridianbogens, dessen Länge man daher nach (128) oder (134) findet. Ist aber CD klein, so kann man ohne merklichen Irrthum CD als einen Kreisbogen ansehen, indem man die

Digitized by Google

Veränderung, welche der Krümmungshalbmesser den Meridians von C bis D leidet, vernachläßigt. Heißt dann γ der Krümmungshalbmesser in C, so ist $CD_1 = \gamma . \Delta\lambda . \sin 1''$. Ebenso wäre $DD'_1 = \gamma' . \partial\lambda . \sin 1''$, wo γ' im Puncte D' oder D genommen ist. Für den unendlich kleinen Bogen DE ist diese Bestimmung genau richtig, und um zu finden, in wie weit sie es für andere Bogen seyn kann, wollen wir suchen, welchen Irrthum man begeht, wenn man $DD'_1 = \gamma' . \partial\lambda \sin 1''$ setzt.

Nimmt man die Formel aus (134) und setzt $K = \partial\lambda . \sin 1''$, $T = DD'_1$, so ist: $DD'_1 = a . \partial\lambda . \sin 1'' \left(1 - e^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2L\right)\right) + \frac{3}{4} a e^2 \partial\lambda^2 \sin^2 1'' \sin 2L + a e^4 \partial\lambda \sin 1'' \left\{ - \frac{3}{64} - \frac{3}{16}\cos 2L + \frac{15}{64}\cos 4L \right\}$, wo L die Breite von D bedeutet. Aber $\gamma' = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 \cos 2L - \frac{3}{64}e^4 - \frac{3}{16}e^4 \cos 2L + \frac{15}{64}e^4 \cos 4L\right)$. Demnach ist also DD'_1 von $\gamma' \partial\lambda \sin 1''$ um $\frac{3}{4} a e^2 \partial\lambda^2 \sin^2 1'' \sin 2L$ verschieden.

Wenn $L = 45°$ ist, so ist $\sin 2L = 1$, also der Irrthum $\frac{3}{4} a e^2 (\partial\lambda \sin 1'')^2$.

Fragen wir nun, wie groß $\partial\lambda$ seyn muß, damit der Irrthum 1 Met. betrage, so ist $\frac{3}{4} a e^2 \partial\lambda^2 \sin^2 1'' = 1$ oder $\partial\lambda^2 = \frac{4}{3 a e^2 \sin^2 1''}$, woher $\partial\lambda = 1174'' = 19', 34''$. Wenn $\partial\lambda$ nur halb so groß ist, wird der Irrthum 4mal kleiner; also ist er nur $\frac{1}{4}$ Met. für $\partial\lambda = 10'$.

Wir fahren nun fort, die Größen, deren Werthe in (168) gegeben sind, hier zu bestimmen. Wenn N die Normale im Puncte C (Fig. L.), das heißt $\frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}$ ist, so wird (Fig. LI.) $CB_1 = N \cot\lambda$ seyn; folglich $BD_1 = N \cot\lambda + CD_1$. Der Radius von Cn auf dem Ellipsoide ist $N \cos\lambda$, der von Dn' ist $N' \cos(\lambda - \Delta\lambda)$, der von EL ist $N'' \cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)$, wenn N', N'', die Normalen in den Puncten D' und E sind.

Auf dem Ellipsoide, und mithin auch auf der Charte, sind also:
$Cn_1 = pN \sin 1'' \cos\lambda$, $Dn'_1 = pN' \sin 1'' \cos(\lambda - \Delta\lambda)$, $EL_1 = pN'' \sin 1'' \cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)$.

Um Cn, Dn', EL in Secunden zu finden, bemerke man, daß ihre Radien auf der Charte, $N \cot\lambda$, $N \cot\lambda + CD_1$, $N \cot\lambda + CD_1 + ED_1$ sind. Demnach findet man:

$$Cn = \frac{pN \sin 1'' \cos\lambda}{N \cot\lambda \sin 1''} = p \sin\lambda, \quad Dn' = \frac{pN' \cos(\lambda - \Delta\lambda)}{N \cot\lambda + CD_1} = \Theta$$

$$EL = \frac{pN'' \cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda)}{N \cot\lambda + CD_1 + ED_1}.$$

Digitized by Google

176) $E_1K = (N \cot\lambda + CD_1 + ED_1) \Theta \sin 1''$.

$$L_1K = E_1K - E_1L = \frac{(N \cot\lambda + CD_1 + ED_1)\, pN' \sin 1'' \cos(\lambda - \Delta\lambda)}{N \cot\lambda + CD_1} - pN'' \sin 1'' \cos(\lambda - \Delta\lambda - d\lambda).$$

$\lambda - \Delta\lambda$ sei $= \lambda'$, dann ist $N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}$; nimmt λ' um $d\lambda$, welches unendlich klein ist, ab, so wird $dN' = \frac{-\frac{1}{2} a e^2 . 2 \sin\lambda' \cos\lambda' . d\lambda \sin 1''}{(1 - e^2 \sin^2\lambda')^{\frac{3}{2}}}$.

Nun ist $N'' = N' + dN'$, also:

$$E_1K - E_1L = pN' \sin 1'' \cos\lambda' + \frac{ED_1 . pN' \sin 1'' \cos\lambda'}{N \cot\lambda + CD_1} - pN' \sin 1'' \cos(\lambda' - d\lambda)$$

$$- p\,dN' \sin 1'' \cos(\lambda' - d\lambda) =$$

$$= \frac{ED_1 . p . N' \sin 1'' \cos\lambda'}{N \cot\lambda + CD_1} - pN' \sin^2 1'' \sin\lambda' . d\lambda - p\,dN' \sin 1'' \cos\lambda'.$$

Wenn man für N' und dN' in den beiden letzten Gliedern ihre Werthe setzt, und gehörig reduzirt, dann auch statt ED_1, $\gamma' d\lambda \sin 1''$ schreibt, so findet man:

$K_1L = p\gamma' \sin^2 1'' d\lambda \left\{\frac{N' \cos\lambda'}{N \cot\lambda + CD_1} - \sin\lambda'\right\}$. Demnach ist

$$\text{tang}\, L_1n'K = \frac{K_1L}{ED_1} = p \sin 1'' \left\{\frac{N' \cos\lambda'}{N \cot\lambda + CD_1} - \sin\lambda'\right\}.$$ Für $\Delta\lambda = o$ ist $CD_1 = o$, $N' = N$, $\lambda' = \lambda$, und folglich $\text{tang}\, L_1n'K = o$; woraus man sieht, daß die Meridiane auch in dem gegenwärtigen Falle auf dem mittleren Parallelkreise senkrecht stehen.

Die Auflösung der Aufgabe in (171) kann ohne alle Veränderung bestehen bleiben, und es ist unnöthig die Aufgabe aus (172) hier neuerdings zu behandeln, indem der Einfluß der Abplattung auf die dort berechnete Abweichung nicht in Anschlag kommen kann. Das Nämliche gilt von (170 bis) und (172 bis).

177) Der Inhalt des unendlich kleinen Rechteckes $STKn'$ ist auf der Charte gleich $\gamma' d\lambda \sin 1'' . N' \cos(\lambda - \Delta\lambda) . dp . \sin 1'' = \gamma' . N' . dp . d\lambda . \sin^2 1'' . \cos(\lambda - \Delta\lambda)$. Dieser Inhalt ist der nämliche auf dem Ellipsoide, woher es sich ergiebt, daß alle Flächeninhalte auf der Charte die nämlichen wie in der Wirklichkeit sind.

178) Wir wollen nun noch die Aufgabe aus (174) auflösen. Fig. LII. ist $CK = N \cot\lambda + BK$, BK ist durch die Breite des Punctes M gegeben.

Digitized by Google

Nun ist $\Theta = \frac{pN' \cos(\lambda - \Delta\lambda)}{CK_1}$; $x = CK_1 . \sin\Theta$; $y = CK_1 \cos\Theta - N \cot\lambda$.

179) In der vorhergehenden Theorie liegen die vollständigen Mittel, um auf die Charte Meridiane und Parallelkreise zu ziehen, und um Puncte, deren geographische Längen und Breiten bekannt sind, zu projiciren. Die so aufgetragenen Puncte sollen den Feldmessern, welche die Detail-Aufnahme anfertigen, zur Verification dienen. Hierzu ist aber nöthig, daß die Lage der projicirten Puncte gegen einander weniger von ihrer wirklichen Lage abweiche, als die Irrthümer betragen, welche man in jeder Detail-Aufnahme dulden muß. Wir können erfahren, in wie weit dieses Statt habe, wenn wir die Winkel auf der Charte mit den Winkeln auf der Kugel vergleichen und dabei berücksichtigen, daß der Feldmesser keine krumme geodätische Linien, sondern nur ihre Sehnen zieht. Demnach wird der Unterschied zwischen einem Winkel auf der Charte und einem wirklichen Winkel aus den beiden Abweichungen, wovon die eine in (170 bis) und die andere in (172 bis), letztere unter dem Namen, Winkel der Tangente mit der Sehne, berechnet wurde, zusammengesetzt seyn.

Die zweite ist hier unbedeutend; denn betrachten wir, daß der Aufnehmende wohl keine größere Richtlinie als 0,5 Met. auf dem Papiere haben kann, und ebenfalls nie in einem kleinern Maaßstabe als $\frac{1}{20000}$ aufträgt, so erhellt, daß die wirkliche Länge der Richtlinie nie mehr als 10000 Met. ist. Wir wissen aber aus (172 bis), daß der Winkel, den, bei dieser Größe der geodätischen Linie, die Tangente mit der Sehne bildet, höchstens gleich $\frac{51''}{4}$ oder 13″ ist, selbst in einer Entfernung von 10° vom mittleren Meridiane. Diese Abweichung ist bei weitem unter den Irrthümern einer Detail-Aufnahme; man kann also schließen, daß die zwischen zwei Puncten auf der Charte gezogene gerade Linie hier als die Projection der wahren geodätischen Linie angesehen werden dürfe.

Weit größer hingegen ist die Abweichung der Winkel auf der Charte von den wirklichen Winkeln, welche wir (170 bis) berechnet haben. Diese kann bis auf $p\Delta\lambda \cos\lambda \sin 1''$ gehen, und ist schon, wenn p und $\Delta\lambda$ beide nur 2°, 30′ betragen und $\lambda = 45°$ gesetzt wird, über 4′. Es ist indessen wohl zu bemerken, daß wir hier unterstellt haben, p und $\Delta\lambda$ seien beide gleich 2°, 30′. Nähme man die eine dieser Größen, z. B. $\Delta\lambda$, nur gleich

Digitized by Google

30′, so könnte p schon 12°, 30′ seyn, ehe die obige Abweichung von 4′ Statt fände. Wenn man nun bedenkt, daß p und $\Delta\lambda$ zu beiden Seiten des mittleren Meridianes und Parallelkreises genommen werden, so wird aus dem Vorhergehenden klar, daß eine Zone, welche 25 Längengrade, aber nur einen Breitengrad einnähme, sich so projiciren ließe, daß auch in den vom Mittelpuncte der Charte entferntesten Theilen derselben, die Abweichung der Winkel von den wirklichen Winkeln höchstens 4′ betrüge. Macht man die Dimensionen der Zone kleiner, so kann man diese Abweichung nach Belieben vermindern.

180) Wenn daher die Charte eines großen Landes nach der modificirten Flamsteed'schen Projection aufgenommen werden soll, so bleibt nichts anderes übrig, als dasselbe in Zonen von geringer Breite zu theilen, und jede Zone für sich zu projiciren.

Bei diesem Verfahren wird die Eintheilung der Charte in Blätter, durch gerade Linien, welche mit dem mittleren Meridiane parallel oder auf demselben senkrecht wären, wie Fig. XLI. (161), nicht angehen; denn man sieht sogleich, daß auf das nämliche Blatt Stücke von zwei verschiedenen Zonen kommen könnten, welche unmöglich genau zusammen paßten. Man muß daher die Blätter durch Meridiane und Parallelkreise begrenzen. Die Construction dieser ihrer Randlinien hat gar keine Schwierigkeiten, da man die Parallelkreise immer nahe genug bei einander nimmt, um die dazwischen liegenden Meridianbogen als gerade Linien ansehen zu können; sie ist folgende:

Fig. LV. sollen die durch stärkere Linien begrenzten Vierecke Blätter der Charte bedeuten. M N sei der mittlere Meridian, und B K eine mit demselben parallel laufende gerade Linie.

Sind dann B M und A N die bekannten x der Puncte B und A, so kennt man auch A K = A N — B M und ebenso B K, welches die Differenz der y von B und A ist. Aus der nämlichen Ursache sind auch die Linien B T, C T, C O und D O als bekannt anzusehen. Um nun das Blatt B A D C zu construiren, nehme man auf dem Papiere den Punkt B und die Richtung B K nach Willkühr, und trage die Puncte A, C und D nach den oben bestimmten Coordinaten auf. Um die Parallelkreisbogen A D, B C gut zu zeichnen, muß man zwischen ihren Endpuncten noch einen dritten Punct haben, welcher entweder auch durch Coordinaten bestimmt wird, oder anders gefunden werden kann, wie wir später (181) 4. zeigen.

Digitized by Google

181) Nach der vorhergehenden kurzen Auseinandersetzung der hier zu befolgenden Methode, können wir nun die Aufgaben, deren Auflösungen sie erheischt, und welche noch nicht offenbar in der bisher abgehandelten Theorie vorkamen, erkennen und einzeln vornehmen wie folgt:

1. Zu finden in wie viele Zonen das aufzunehmende Land getheilt werden müsse.

Man nenne λ die ohngefähre mittlere Breite desselben. Die Hälfte des größten Längenunterschiedes, welchen zwei Puncte dieses Landes haben können, sei p Secunden. Die Hälfte der unbekannten Anzahl Secunden, welche jede Zone an geographischer Breite einnehmen soll, heiße $\Delta\lambda$, und der Irrthum, den man in den Winkeln der Detail-Aufnahme dulden will, sei a Secunden. Dann darf nach (179) höchstens

$p\Delta\lambda \cos\lambda \sin 1'' = a$ oder $\Delta\lambda = \frac{a}{p \cos\lambda \sin 1''}$ seyn, woher man $\Delta\lambda$ bestimmen kann.

2. Den Breitenunterschied der Parallelkreise BC, AD Fig. LV, welche ein Blatt der Charte begrenzen sollen, zu finden.

In der Auflösung dieser Aufgabe richtet man sich nach der Größe, welche die Blätter auf dem Papiere haben dürfen, und nach dem Maaßstabe der Aufnahme. Setzen wir z. B., daß auf dem Papiere nur für ein Quadrat von $0{,}5^{\text{Met.}}$ Seite Raum sei, und man 1 für 10000 auftrage, so darf das Stück Meridian, welches den einen Rand des Blattes bildet, in der Wirklichkeit nicht über 5000 Met. betragen. Nennt man nun $\delta\lambda$ die hier gesuchte Anzahl Secunden dieses Meridianbogens, so darf nach dem Vorigen höchstens

$R\delta\lambda \sin 1'' = 5000$ Met. oder $\delta\lambda = \frac{5000}{R \sin 1''}$ seyn.

Hier fände man demnach $\delta\lambda = 2', 8''$.

3. Den Längenunterschied der beiden Meridiane BA, CD Fig. LV, welche ein Blatt begrenzen, zu bestimmen.

Man bestimme zuerst, wie in der vorigen Aufgabe, wie lang die Parallelkreisbogen AC, AD seyn dürfen.

Heißt nun Δp der Längenunterschied zweier Puncte, die auf dem nämlichen Parallelkreise liegen, so ist der zwischen denselben liegende Bogen, sowohl auf der Kugel, als auch auf der Charte gleich $\Delta p . R . \cos\lambda' \sin 1''$, wo λ' die Breite des Parallelkreises

Digitized by Google

bedeutet, und wir können hier ohne Weiteres $\lambda' = \lambda$ setzen. Behält man also das in der vorhergehenden Aufgabe gewählte Beispiel, so hat man zur Bestimmung von Δp die Gleichung $R \cdot \Delta p \cdot \cos\lambda \cdot \sin 1'' = 5000$, woher $\Delta p = \frac{5000}{R \cdot \cos\lambda \sin 1''}$, hier 3′, 20″ wird.

4. Wenn zwei nahe liegende Puncte eines Parallelkreises aufgetragen sind; den zwischen diesen Puncten in der Mitte liegenden dritten Punct desselben Parallelkreises zu bestimmen.

Man ziehe zwischen den beiden gegebenen Puncten die Sehne. Heißt ihre Länge S und der Radius des Parallelkreises r, so ist die Entfernung des gesuchten Punctes von der Mitte der Sehne gleich $\frac{S^2}{8r}$, welches man sehr leicht berechnen und auftragen kann.

182) Die Operationen, welche zur Construction einer Charte nach der gegenwärtigen Projection, und gemäß der in (180) angegebenen Methode nöthig sind, werden in folgender Ordnung verrichtet.

a) Man bestimme nach 1. (181) die Anzahl der Zonen.

b) Man setze die Ausdehnung der Blätter fest, wie in 2. und 3. (181) gezeigt worden ist.

c) Um die Excentricität der Erde zu beachten, wird man die Werthe der Normalen N und die der Krümmungs-Halbmesser γ für jede auf der Charte befindliche geographische Breite kennen müssen. Man kann sich aber damit begnügen sie von 10′ zu 10′ oder höchstens von 6′ zu 6′ zu berechnen, und man darf dann jedes andere N oder γ dem zunächstliegenden berechneten gleich annehmen oder dasselbe durch Interpolation bestimmen.

Nun beschäftigt man sich mit jeder Zone insbesondere und bezeichnet:

d) den mittleren Punct in derselben durch sein λ.

e) Hierauf berechnet man $N \cot\lambda$.

f) Man bestimmt die Radien der Parallelkreise, welche die Blätter begrenzen sollen.

g) Berechnung der Coordinaten der Eckpuncte der Blätter.

Hierzu müssen erst alle Θ dieser Puncte bestimmt werden, wobei die Bemerkung sehr zu Statten kömmt, daß man nur die Θ der dem mittleren Meridiane zunächst gelegenen Eckpuncte nach der Formel (178) zu suchen braucht; denn die übrigen Θ sind vielfache von diesen ersten.

Digitized by Google

Der mittlere Meridian theilt das Netz der Blätter in zwei symmetrische Theile, und deshalb ist es auch nur nöthig die Coordinaten auf einer Seite dieses Meridianes zu berechnen.

h) Man berechnet die Coordinaten der Puncte des trigonometrischen Netzes.

Die Länge und Breite eines solchen Punctes zeigt sogleich an, in welche Zone und in welches Blatt derselbe fällt. Man kann also die Unterschiede zwischen seinen Coordinaten und den Coordinaten des ihm zunächst liegenden Eckpunctes finden, wodurch der Punct sich wie (180) angegeben ist, auftragen läßt.

i) Man pflegt nicht von allen Puncten eines trigonometrischen Netzes ohne Ausnahme die Breiten und Längen zu berechnen, sondern dies geschieht nur für die Dreiecke erster Ordnung. Als solche kann man alle diejenigen ansehen, deren Seiten über 10000 Met. betragen. Kleinere Dreiecke werden zu der zweiten Ordnung gezählt. Soll dann ein Dreieck zweiter Ordnung aufgetragen werden, so kann man folgendermaaßen verfahren.

Man bestimme die ohngefähren nordöstlichen Azimuthe seiner Seiten nach der Art, wovon in (98) Meldung geschehen ist, indem man von dem zunächstliegenden genau berechneten Azimuthe ausgeht. Hierdurch kann man dann nach (170 bis) die Unterschiede *) zwischen den wirklichen Winkeln des Dreieckes und den Winkeln auf der Charte, folglich diese letzteren Winkel genau finden. Sind diese Winkel einmal bekannt, so ist es leicht die den Umständen anpassenden Mittel zu finden, um das Dreieck zu projiciren.

k) Wegen des Gebrauches der Bouffole ist es gut auf einem und dem nämlichen Blatte mehrere Meridiane zu haben. Man braucht zu diesem Zwecke nur die beiden Parallelkreisbogen, welche zwei gegenüberstehende Randlinien eines solchen Blattes bilden, in eine gleiche Anzahl gleicher Theile zu theilen, und die correspondirenden Theilungspuncte durch gerade Linien zu verbinden.

l) Das Zusammentragen mehrerer nach der vorhergehenden Methode projicirten und aufgenommenen Zonen in eine einzige Charte ist sehr leicht. Denn sind einmal auf die letztere die Meridiane und Parallelkreise gezeichnet, so wird jedes zwischen solchen Linien eingeschlossene Viereck, sein entsprechendes unter den aufgenommenen Blättern haben. Wenn

*) Die zur Berechnung des Unterschiedes nöthigen p und $\Delta\lambda$ braucht man nur ohngefähr zu kennen, und man kann ihre Werthe hinlänglich genau auf der Figur abnehmen, welche man sich zur Bestimmung der Azimuthe construiren muß.

Digitized by Google

man daher jede zwei entsprechende Figuren durch Netze correspondirender Linien bedeckt, so wird das Uebertragen der Blätter auf die Gesammt-Charte leicht und mit beliebiger Genauigkeit von Statten gehen. Fig. LIV. ist eine solche Gesammt-Charte in kleinem Maaßstabe dargestellt.

182) bis. Ungeachtet aller Vortheile, welche die Begrenzung der Blätter durch Meridiane und Parallelkreise darbietet, scheint man doch bisher die Eintheilung der Charten durch Linien, welche auf dem mittleren Meridiane senkrecht, oder mit demselben parallel sind, ausschließlich angewendet zu haben. Indessen beweißen (179) und (180), daß dieses höchstens für ein Land, welches 5 Längen-Grade und 5 Breiten-Grade, oder eine gleiche Fläche einnähme, geschehen dürfte, wenn die projicirten Puncte zur Verification der Aufnahmen dienen sollten. Man kann also die Eintheilung in Rechtecke nur bei der Aufnahme von kleinern Landes-Strecken, oder bei dem Zusammentragen mehrerer Charten in eine einzige gebrauchen. (Fig. LV bis) stellt eine so eingetheilte Charte vor; AY ist der mittlere Meridian, und AX eine Senkrechte auf demselben. Die Blätter haben alle gleiche Dimensionen, und wenn sie auseinander genommen sind, so erkennt man die Stelle eines jeden durch eine Bezeichnung, welche leicht aus folgenden Beispielen zu verstehen ist. Das Blatt $\alpha\beta\gamma\delta$ wird an der rechten Seite die Nummer 2 und oben die Nummer 3 haben; $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ hat zur Linken 2 und oben 3; $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$ hat zur Rechten 2 und unten 3; es versteht sich von selbst, daß auf jedem Blatte die Nord- oder obere Seite angegeben ist.

183) Wenn die Charte nach der letzteren Methode abgetheilt ist, und man kennt die Coordinaten Mp und Ap eines Punctes M, so weiß man sogleich, in welches Blatt der Punct fällt, und man kann durch eine bloße Subtraction die Entfernungen MK, Kγ, bestimmen, folglich den Punct an die gehörige Stelle auftragen.

Die Meridiane werden, wie wir wissen, als geradgebrochene Linien gezogen. Wenn aber M und N zwei auf einander folgende Puncte eines Meridianes sind, und die Blätter, wo diese Puncte liegen, sind abgesondert, so daß man sie nicht ganz genau mit ihren Randlinien zusammenlegen kann, so muß man den Punct I bestimmen, wo die gerade Linie MN die $\alpha\beta$ schneidet, welches sehr leicht ist: denn

$$L\alpha : LK = \alpha I - LN : KM - LN, \text{ woher } \alpha I - LN = \frac{L\alpha\,(KM - LN)}{LK}.$$

Digitized by Google

Die Bestimmung eines solchen Durchschnittspunctes bietet mehrere andere Fälle dar, deren Auflösungen aber zu einfach, und mit der vorigen zu ähnlich sind, als daß wir nöthig fänden darüber noch etwas zu sagen.

Es ist hier nicht nothwendig die Parallelkreise auf die Blätter, welche zum Aufnehmen bestimmt sind, zu ziehen; wenn aber die Gesammt-Charte am Ende doch noch aus mehreren Blättern zusammengesetzt seyn soll, so ist es zum Zeichnen der Parallelkreise auf dieselben sehr dienlich, ihre Durchschnittspuncte mit den Rändern der Blätter zu kennen. Zu diesem Endzwecke sind folgende Aufgaben aufzulösen.

1. Den Punct M (Fig. LII.) zu finden, wo eine gegebene Linie wie PM den gegebenen Parallelkreis MK schneidet; 2. den Punct M zu finden, wo eine Linie wie MO den Parallelkreis schneidet.

Es sei $CK = r$, $CP = a$, so ist $PM^2 = r^2 - a^2$ oder $PM = \sqrt{(r+a)(r-a)}$. Ist $BO = PM = b$ gegeben, und OM wird gesucht, so ist $CP = \sqrt{(r-b)(r+b)}$ und $OM = CP - N \cot \lambda$.

Wir glauben nun Alles gesagt zu haben, was irgend zur richtigen Beurtheilung und zu einer genauen Construction einer Charte nach der modificirten Flamsteed'schen Projections-Art beitragen kann *). Wir werden also zu der Theorie der noch häufig angewendeten Projection von Cassini übergehen.

184) Um eine Charte nach der Projection von Cassini zu zeichnen, wählt man sich wie bei der vorigen einen mittleren Punct. Der Meridian dieses Punctes wird auf eine gerade Linie entwickelt, und seine Perpendiculäre auf eine andere gerade Linie, welche auf dem entwickelten Meridiane senkrecht steht. Die Projection von Cassini.

Fig. LVI. ist A der mittlere Punct, AX der Meridian, und Ay die Perpendiculäre. Um nun jeden Punct M auf der Projection zu bezeichnen, trage man von A nach P die Entfernung des Punctes M von der Perpendiculäre von A und mache die senkrechte MP der Entfernung des Punctes M von dem Meridiane von A gleich.

Die Construction einer Charte nach der gegenwärtigen Projection erfordert also weiter nichts, als daß man die Entfernungen eines Punctes M, dessen Länge und Breite gegeben

*) Eine numerische Anwendung der hierhin gehörigen Methoden findet man im dritten Theile, von (230) bis (240).

Digitized by Google

sind, von dem Meridiane und der Perpendiculäre eines anderen bestimmten Punctes A zu berechnen wisse, welches wir auf allen Stufen der Genauigkeit zu thun gelernt haben.

185) Die hierzu erfoderliche, durch die Beachtung der Excentricität meistens sehr weitläufige Rechnung kann man oft zum Theile vermeiden, wenn man, anstatt die Entfernungen jedes Punctes von AX und AY zu berechnen, blos die Unterschiede dieser Entfernungen für zwei nahe liegende Puncte sucht; denn wenn C und B solche Puncte sind, so wird der Einfluß, den die Excentricität auf die Größe der Coordinaten von C und B hat, sehr nahe für beide Puncte der nämliche seyn, so, daß wenn man diese Coordinaten ohne Rücksicht auf die Abplattung berechnet, und von einander abzieht, der erhaltene Unterschied von dem Unterschiede der wahren Coordinaten nur sehr wenig abweichen kann.

Wir wollen diese Bemerkung auf die Berechnung der Coordinaten der Durchschnittspuncte der Meridiane und Parallelkreise anwenden.

Hierzu lösen wir folgende Aufgabe auf:

Wenn die Coordinaten x, y, irgend eines Punctes M bekannt sind, die Coordinaten eines anderen M', welcher nahe bei M und auf dem nämlichen Parallelkreise liegt, zu finden.

Die Breite von A sei λ; die gemeinschaftliche Breite von M und M' sei λ'. Die Länge des Punctes M von A her sei φ; die Länge des Punctes M' von A her sei $\varphi + \Delta\varphi$. Man setze $M'P' - MP = \Delta y$, $AP' - AP = \Delta x$, $MP = y$, $AP = x$; MT und M'T' sind die Meridiane von M, M'; M'M m' ist ihr Parallelkreis.

Die Linien AX, MT, MP einerseits, und AX, M'T', M'P' andererseits bilden in der Wirklichkeit rechtwinkelige Dreiecke, welche sphärisch sind, wenn man die Erde kugelförmig unterstellt, wie wir es hier nach dem Obigen thun wollen.

In dem ersten Dreieck ist 1) $\sin y = \sin\varphi \cos\lambda'$; 2) $\sin(\lambda + x) = \frac{\sin\lambda'}{\cos y}$.

Im zweiten . . . . . 3) $\sin(y+\Delta y) = \sin(\varphi+\Delta\varphi)\cos\lambda'$; 4) $\sin(\lambda+x+\Delta x) = \frac{\sin\lambda'}{\cos(y+\Delta y)}$

Zieht man die erste Gleichung von der dritten ab, so erhält man leicht:

$\sin\frac{\Delta y}{2}\cos\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right) = \cos\lambda'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$, woher:

Digitized by Google

5. $\sin\frac{\Delta y}{2}=\frac{\cos\lambda'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\cos\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)}$. Nun kann man, wenn $\Delta\varphi$ und folglich Δy klein z. B. 6′ sind, blos die ersten Potenzen dieser Größen beibehalten, welches nach geschehener Rechnung: a) $\Delta y=\text{tang}\,y\cot\varphi\,.\,\Delta\varphi$ giebt. Dieses ist Δy in Secunden; um es in Metern zu finden, bemerken wir, daß sein Krümmungshalbmesser die Normale in M′ ist; man multiplizire es also mit dieser und mit sin 1″.

(2) von (4) abgezogen giebt:

6. $2\sin\frac{\Delta x}{2}\,.\,\cos\left(\lambda+x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\lambda'\left(-\cos(y+\Delta y)+\cos y\right)}{\cos y\,.\cos(y+\Delta y)}$, und wenn man blos die ersten Potenzen von Δx und Δy beibehält:

$\Delta x\,.\,\cos(\lambda+x)=\frac{\sin\lambda'\sin y\,.\,\Delta y}{\cos^2 y}$ oder $\Delta x=\Delta y\,.\,\text{tang}\,y\,.\,\text{tang}(\lambda+x)\ldots$ b); dieses Δx muß mit dem zugehörigen γ und sin 1″ multiplicirt werden, um es in Metern zu haben, welches jedoch nicht nöthig ist, wenn schon Δy in Metern ausgedrückt gebraucht wird.

186) Die Formeln (a) und (b) werden folgendermaaßen angewendet: man berechnet zuerst die Entfernungen der Puncte m, m′.... von einander, wo die Parallelkreise dem mittleren Meridiane begegnen. Diese Entfernungen sind in Secunden gegeben, und man findet sie in Metern, wenn man jede mit dem zugehörigen Krümmungshalbmesser und sin 1″ multiplicirt.

Hat man dann durch die Addition solcher Entfernungen eine Abscisse wie Am′ gefunden, und N ist der mit m′ auf dem nämlichen Parallelkreise und diesem zunächst liegende Punct, so findet man die Coordinaten von N, wenn man in den Formeln (a) und (b) für x und y die Coordinaten von m′ setzt, das heißt: $y=0$ und $x=Am'$ macht, woher $\Delta y=\cos\lambda'\cos\varphi\,\Delta\varphi$, und $\Delta x=0$ wird *). Die Coordinaten des Punctes N

*) Daß hier $\Delta x=0$ ist, kömmt daher, weil es zu klein ist, um Glieder erster Potenz von Δy zu enthalten; um den wahren Werth von Δx zu finden, setze man in (6) $y=0$, so wird:

$2\sin\frac{\Delta x}{2}\,.\,\cos\left(\lambda+x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\lambda'\left(1-\cos(\Delta y)\right)}{\cos(\Delta y)}$ und wenn man nur die niedrigsten Potenzen von Δy und Δx beibehält: $\Delta x=\frac{\sin\lambda'\,.\,(\Delta y)^2}{2\cos(\lambda+x)}$.

Digitized by Google

sind also das gefundene Δy und $A m'$. Die Formel giebt Δy sowohl in Secunden als auch in Metern. Setzt man nun in (a) und (b) für x und y die Coordinaten von N, so findet man die Coordinaten des darauf folgenden Punctes M in Secunden und in Längenmaaß *); diesen Gang kann man so weit verfolgen, als man es nöthig hat.

Die Formeln (a) und (b) sind aus zwei Ursachen nicht ganz richtig. Erstens, weil man die höheren Potenzen von Δx, Δy, $\Delta\phi$ wegläßt; zweitens, weil man den Einfluß der Excentricität zum Theil vernachläßigt; wir sagen blos zum Theil, da man, um Δy und Δx in Metern zu haben, diese Größen mit ihren Krümmungshalbmessern und nicht mit einem mittleren Werthe des Erde-Radius multiplicirt.

Diese beiden Irrthümer werden beständig angehäuft, indem die Coordinaten jedes Punctes eine Summe unrichtiger Δy und Δx sind. Man muß deswegen von Zeit zu Zeit die Coordinaten eines Punctes nach den genauen Formeln berechnen, und dann von diesem Puncte ausgehen, um die Formeln (a) und (b) zu gebrauchen.

187) Wir wollen nun die Gestalt der Meridiane auf der Charte untersuchen, indem wir die Erde sphärisch annehmen.

Für jeden Punct M des Meridians MT ist: $\cos(\lambda + x)\tang\phi = \tang y$. Diese Gleichung kann man als die Gleichung des Meridians MT für die Achsen Ay, Ax ansehen. Die Tangente MI an den Meridian macht mit der Achse der x einen Winkel gleich OMI, dessen Tangente $-\frac{dy}{dx}$ ist. Man hat aber

$-\tang\phi \sin(\lambda + x)\,dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$, also: $\tang OMI = \cos^2 y \sin(\lambda + x)\tang\phi$ oder auch $\tang OMI = \cos y \sin\lambda' \tang\phi$, oder endlich $\tang OMI = \frac{1}{2}\sin 2y \,.\, \tang(\lambda + x)$.

188) PL betrage in Secunden Δx, so ist es in Metern $R \,.\, \Delta x \,.\, \sin 1''$.

Nun ist $IL = MP - LP \,.\, \tang OMI = y - R \,.\, \Delta x \,.\, \sin 1'' \,.\, \tang\phi \cos^2 y \sin(\lambda + x)$

also $y - IL = R \,.\, \Delta x \,.\, \sin 1'' \,.\, \tang\phi \cos^2 y \sin(\lambda + x)$. Man suche auch KL zu berechnen. $MP - KL$ heiße Δy, so ist $\tang(y - \Delta y) = \tang\phi \cos(\lambda + x + \Delta x)$, folglich:

$\tang y - \tang(y - \Delta y) = \tang\phi \{\cos(\lambda + x) - \cos(\lambda + x + \Delta x)\}$, oder

---

*) Man muß die Coordinaten auch in Secunden haben, weil in den Formeln (a) und (b) $\cos y$, $\sin y$, $\cos(\lambda + x)$ vorkommen.

Digitized by Google

$\frac{\sin \Delta y}{\cos y \cos (y - \Delta y)} = 2 \tang \phi \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(\lambda + x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Wir wollen in dem Folgenden nur höchstens die zweiten Potenzen von Δx, Δy beibehalten; dann ist also hier:

$$\frac{\Delta y}{\cos (y - \Delta y)} = 2 \tang \phi \,.\, \cos y \,.\, \frac{\Delta x}{2} \sin \left(\lambda + x + \frac{\Delta x}{2}\right), \text{ oder: *)}$$

$\frac{\Delta y}{\cos y + \Delta y \,.\, \sin y} = \tang \phi \,.\, \cos y \,.\, \Delta x \,.\, \sin \left(\lambda + x + \frac{\Delta x}{2}\right)$; setzt man diesen Ausdruck gleich n, so ist $\Delta y = \frac{n \cos y}{1 - n \sin y} = n \cos y \,(1 + n \sin y)$, weil n von der ersten Ordnung ist; aus dieser Ursache kann man auch im Werthe von n innerhalb der Parentheſe die Glieder zweiter Ordnung weglaſſen, woher:

$\Delta y = \tang \phi \,.\, \cos^2 y \,.\, \Delta x \,.\, \sin \left(\lambda + x + \frac{\Delta x}{2}\right) \{1 + \tang \phi \cos y \sin y \,.\, \Delta x \,.\, \sin (\lambda + x)\}$

wird. Soll dieſe Gröſſe in Längenmaaſs ausgedrückt ſeyn, so muſs ſie ganz mit $R \sin 1''$, und es muſs auch innerhalb der Parentheſe Δx mit $\sin 1''$ multiplicirt werden.

Der Unterſchied dieſes Δy mit dem oben berechneten $y - {}_{1}IL$ giebt ${}_{1}IK$; es ist alſo:

$${}_{1}IK = R \,.\, \Delta x \sin 1'' \tang \phi \cos^2 y \left\{ \sin \left(\lambda + x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \sin (\lambda + x) \right\} +$$

$$+ R \,\Delta x^2 \sin^2 1'' \,.\, \tang^2 \phi \cos^3 y \sin y \sin^2 (\lambda + x) \text{ oder}$$

${}_{1}IK = R \sin^2 1'' \,.\, \frac{\Delta x^2}{2} \,.\, \tang \phi \cos^2 y \cos (\lambda + x) + R \,\Delta x^2 \sin^2 1'' \tang^2 \phi \cos^3 y \sin y \sin^2 (\lambda + x)$.

Setzt man im ersten Gliede für $\tang \phi \cos (\lambda + x)$ den Werth $\tang y$, und im zweiten Gliede für $\tang \phi$, $\frac{\tang y}{\cos (\lambda + x)}$, so wird:

${}_{1}IK = R \sin^2 1'' \,.\, \frac{\Delta x^2}{2} \,.\, \sin y \cos y + R \sin^2 1'' \,\Delta x^2 \sin^3 y \cos y \tang^2 (\lambda + x)$ oder:

${}_{1}IK = R \sin^2 1'' \,.\, \frac{\Delta x^2}{4} \,.\, \sin 2 y \,(1 + 2 \sin^2 y \tang^2 (\lambda + x))$.

Dieſer Ausdruck ist deſto gröſser, je gröſser y und $\lambda + x$ ſind. Wir wollen ſetzen, y ſey höchstens 8°, und $\lambda + x$, 54°, und in dieſer Unterſtellung den Coefficienten von Δx^2 berechnen. Man findet $IK = \frac{\Delta x^2 \, 1111}{100000000}$; nimmt man $\Delta x = 6' = 360''$, so ist

*) Wir laſſen im Nenner auch die zweite Potenz von Δy weg, weil bei Wegſchaffung des Nenners dieſe zweite Potenz mit Δx multiplicirt, und alſo von der dritten Ordnung wird.

Digitized by Google

$IK_1 = 1{,}44$ Met.; eine Größe, welche in dem Maaßstabe, worin die größern Charten gewöhnlich gezeichnet werden, nicht bemerkt wird.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß man zwischen zwei Puncten, deren Entfernung nicht über 6′ beträgt, den Meridian als eine gerade Linie ansehen und ziehen kann. Obgleich nun KM nicht ganz genau PL gleich ist, kann man doch aus dem eben Gesagten schließen, daß die Parallelkreise in der gegenwärtigen Projection nächstens von 6′ zu 6′ gezeichnet zu werden brauchen.

189) Wir wollen nun auch die Gestalt der Parallelkreise auf der Charte untersuchen, in der Unterstellung, daß die Erde eine Kugel sei, welches wir um so mehr thun können, da die jetzige Untersuchung von keinem erheblichen Nutzen ist.

Man suche eine Gleichung zwischen m′P und MP, welche für jeden Punct des Parallelkreises MNm′ gilt.

Die Breite des Kreises sei λ'; $AP = x$ in Secunden; so ist $Am' = \lambda' - \lambda$; $Pm' = x - \lambda' + \lambda$, es heiße x'; ferner aus (185) $\cos y = \frac{\sin \lambda'}{\sin(\lambda + x)} = \frac{\sin \lambda'}{\sin(\lambda' + x')}$.

Nimmt man an, y und x' seien so klein, daß man ihre Potenzen, welche über die zweite sind, weglassen könne, so ist $1 - \frac{y^2}{2} = \frac{\sin \lambda'}{\sin \lambda' \cos x' + \cos \lambda' \sin x'} = \frac{1}{1 - \frac{x'^2}{2} + \frac{x'}{\tang \lambda'}}$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, daß x' von der Ordnung y^2 ist, und folglich x'^2 wegbleiben muß; es wird also $y^2 = \frac{2x'}{\tang \lambda'}$. Diese ist die Gleichung einer Parabel, deren Spitze in m′ ist; die Parallelkreise haben also auf der Charte, so lange sie nahe bei dem mittleren Meridiane sind, die Gestalt einer Parabel.

190) Die Coordinaten des Punctes des trigonometrischen Netzes kann man auf mancherlei Art finden.

Liegt der Punct sehr nahe bei dem mittleren Meridiane, so brauche man die Formeln in (115) oder die (99) oder gar (98). Wenn er etwas weiter liegt, nehme man (134, 2). Ist er sehr weit entfernt, so brauche man die ganz genauen Formeln aus (128, 2). Liegt ein Punct, dessen Coordinaten bekannt sind, sehr nahe bei einem andern, dessen Coordinaten man wissen will, so kann man die Formeln in (99) anwenden.

Digitized by Google

Man thut dabei sehr wohl, wenn man die daselbst berechneten Coordinaten-Unterschiede mit ihren Krümmungshalbmessern und nicht mit einem mittleren Radius der Erde multiplicirt, um sie in Metern zu erhalten.

191) In dem gegenwärtigen Paragraphen wollen wir versuchen den Unterschied zwischen den projicirten Winkeln und den wirklichen Winkeln zu berechnen.

Es sei V der wahre nordöstliche oder nordwestliche *) Azimuth einer von M ausgehenden geodätischen Linie. Derselbe Azimuth auf der Charte heiße V′ und den in (187) berechneten Winkel O M I nenne man T. Dann ist $\text{tang}(V'-T)=\frac{dy}{dx}$ und die dy, dx sind die nämlichen wie auf der Kugel. Heißt nun das erste Element der geodätischen Linie dS, sind λ', φ die Breite und Länge von M, und bedeuten $\lambda'+d\lambda'$, $\varphi+d\varphi$ die nämlichen Größen für den Endpunct von dS, so ist:

$d\lambda=\frac{dS\,.\cos V}{R\sin 1''}$, $d\varphi=\frac{dS\,.\sin V}{\cos\lambda'\,.\,R\sin 1''}$. Man hat auch aus (185) und (187)

1) $\sin(\lambda+x)=\frac{\sin\lambda'}{\cos y}$, 2) $\sin y=\sin\varphi\cos\lambda'$, 3) $\text{tang}\,y=\text{tang}\,\varphi\cos(\lambda+x)$,

4) $\text{tang}\,T=\cos^2 y\sin(\lambda+x)\,\text{tang}\,\varphi$, also:

$$\cos y\,dy=\cos\varphi\cos\lambda'\,d\varphi-\sin\varphi\sin\lambda'\,d\lambda'.$$

$$\cos(\lambda+x)\,dx=\frac{\cos\lambda'\,d\lambda'}{\cos y}+\text{tang}\,y\,.\sin\lambda'\,\frac{dy}{\cos y}$$ oder, wenn man für dy seinen Werth setzt,

$$\cos(\lambda+x)\,dx=\frac{d\lambda'(\cos\lambda'\cos y-\text{tang}\,y\sin\varphi\sin^2\lambda')}{\cos^2 y}+$$

$$+\frac{\text{tang}\,y\cos\varphi\sin\lambda'\cos\lambda'\,d\varphi}{\cos^2 y}.$$

Durch eine zweckmäßige Verbindung der Gleichungen (1), (2), (3) findet man, daß die Größe, womit $d\lambda'$ im Zähler multiplicirt ist, sich auf $\frac{\cos\lambda'\cos^2\varphi}{\cos y}$ reducirt, so daß

$\cos(\lambda+x)\,dx=\frac{d\lambda'\,.\cos\lambda'\cos^2\varphi+\sin y\cos\varphi\sin\lambda'\cos\lambda'\,.\,d\varphi}{\cos^3 y}$, oder, wenn man für $\sin y$ seinen Werth aus (2) schreibt:

---

*) In unserer Figur LVI. wo wir den Norden gegen X hin annehmen, sei V ein nordwestlicher Azimuth; auf der anderen Seite des mittleren Meridians wäre er nordöstlich.

Digitized by Google

$\cos(\lambda+x)dx = \frac{\cos\lambda'\cos\varphi(d\lambda'\cos\varphi+\sin\varphi\sin\lambda'\cos\lambda'd\varphi)}{\cos^3 y}$. Man wird alſo:

$\frac{\cos y.dy}{\cos(\lambda+x).dx} = \frac{(\cos\varphi\cos\lambda'd\varphi-\sin\varphi\sin\lambda'd\lambda')\cos^3 y}{\cos\lambda'\cos\varphi(d\lambda'\cos\varphi+\sin\varphi\sin\lambda'\cos\lambda'd\varphi)}$ haben, woher:

$\frac{dy}{\cos(\lambda+x)dx} = \frac{\cos^2 y\left(\frac{d\varphi\cos\lambda'}{d\lambda'}-\text{tang}\,\varphi\sin\lambda'\right)}{\cos\lambda'\left(\cos\varphi+\sin\varphi\sin\lambda'.\frac{d\varphi.\cos\lambda'}{d\lambda'}\right)}$ wird. Da nun

$\frac{d\varphi\cos\lambda'}{d\lambda'} = \text{tang}\,V$, ſo wird: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y\cos(\lambda+x)}{\cos\lambda'\cos\varphi}\left(\frac{\text{tang}\,V-\text{tang}\,\varphi\sin\lambda'}{1+\text{tang}\,\varphi\sin\lambda'\,\text{tang}\,V}\right)$

Allein man findet: $\frac{\cos^2 y\cos(\lambda+x)}{\cos\lambda'\cos\varphi} = \cos y$ und es iſt aus (4) und (1)

$\text{tang}\,T = \cos y\sin\lambda'\,\text{tang}\,\varphi$, folglich $\sin\lambda'\,\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,T}{\cos y}$. Man erhält alſo:

$\frac{dy}{dx}$ oder $\text{tang}(V'-T) = \frac{\cos^2 y\,\text{tang}\,V-\cos y\,\text{tang}\,T}{\cos y+\text{tang}\,V\,\text{tang}\,T}$. Setzen wir nun feſt, daß nur die zweiten Potenzen von y und keine höhere beibehalten werden, ſo muß man auch $\cos y\,\text{tang}\,T = \text{tang}\,T$ ſetzen, weil T von der Ordnung φ oder y iſt; dann wird aber:

$\text{tang}(V'-T) = \frac{\text{tang}\,V-\text{tang}\,T-y^2\,\text{tang}\,V}{1+\text{tang}\,V\,\text{tang}\,T-\frac{y^2}{2}}$. Dividirt man Zähler und Nenner durch $1+\text{tang}\,V\,\text{tang}\,T$ und beobachtet, daß, wie ſchon geſagt, tang T von der Ordnung y iſt, ſo wird: $\text{tang}(V'-T) = \frac{\text{tang}(V-T)-y^2\,\text{tang}\,V}{1-\frac{y^2}{2}}$ oder:

$\text{tang}(V'-T) = \text{tang}(V-T)-\frac{y^2}{2}\text{tang}\,V$. Aus dieſer Gleichung zieht man leicht auf dem gewöhnlichen Wege: $V'-V = -\frac{y^2}{4}\sin 2V\sin 1''$, wenn y in Secunden gegeben iſt. Man kann auch für y den Werth von $\varphi\cos\lambda'$ ſetzen, wodurch:

$$V'-V = -\frac{\varphi^2\cos^2\lambda'}{4}\sin 2V\sin 1'' \text{ wird.}$$

Hieraus kann man auf die nämliche Art wie in (170, bis) ſchließen, daß der größte Unterſchied zwiſchen einem Winkel und ſeiner Projection $\frac{\varphi^2\cos^2\lambda'}{4}\sin 1''$ beträgt, wenn

Digitized by Google

man übrigens für λ' den kleinsten Werth nimmt, welchen es auf der Charte haben kann. Es sei dieser 45°, so ist die vorige Größe $\frac{\varphi^2 \sin 1''}{8}$. Soll diese 4′ betragen, so darf $\varphi^2 = \frac{8 . 240}{\sin 1''}$, das ist, $\varphi = 5°,30'$ seyn.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der Schluß: daß Puncte, welche nach der Projection von Cassini aufgetragen worden sind, noch, wenn sie schon um 5°,30′ vom mittleren Meridiane entfernt liegen, zur Verification einer Aufnahme, worin Irrthümer von 4′ geduldet werden, dienen können; daß dieser geduldete Irrthum nur 1′ zu betragen braucht, wenn die Entfernung der Puncte vom mittleren Meridiane nicht 2°,45′ übersteigt.

Man kann also mit Beibehaltung eines und desselben mittleren Punctes ein, zwischen zwei um 5°,30′ entfernten Meridianen liegendes, Stück der Erde-Oberfläche, worin keine bedeutend kleinere Breite als 45° vorkömmt, projiciren, ohne daß die Winkel auf der Charte von den wirklichen Winkeln um mehr als 1′ verschieden seien.

Vergleichen wir die eben erhaltenen Resultate mit denjenigen, welche uns die Discussion der modificirten Flamsteed'schen Projection darbot, so sehen wir, daß die Gestalten der Figuren durch diese bedeutend mehr verändert werden, als durch die Projection von Cassini. Aber die letztere hat nicht den Vortheil, daß die Flächen auf der Charte die nämlichen wie auf der Kugel sind.

Eine numerische Anwendung von der Construction einer Charte nach Cassini siehe von (240) bis (252).

192) Der Lauf eines Schiffes, welches immer den nämlichen Windstrich *) verfolgt, ist eine auf der Meeresfläche beschriebene krumme Linie, welche mit allen Meridianen, denen sie begegnet, gleiche Winkel macht. Man nennt sie eine Loxodromie. See-Charten

Es ist für die Seefahrer durchaus nothwendig, daß sie Charten haben, worauf die Loxodromien leicht gezeichnet werden können, und wo diese Linien mit den Meridianen die nämlichen Winkel machen, wie auf der Meeresfläche selbst.

---

*) Windstrich (Rumb de vent) wird von den Seeleuten die Richtung genannt, in welcher das Schiff nach der Angabe des Compasses steuert. Der Windstrich ist also durch den Azimuth dieser Richtung vollkommen bestimmt.

Digitized by Google

Es würde zu diesem Zwecke am vortheilhaftesten seyn, wenn man eine, die letztere Bedingung erfüllende, Projections-Art finden könnte, in welcher die Loxodromien gerade Linien wären.

Damit dieses Statt fände, müßten vor Allem die Meridiane durch gerade und parallele Linien dargestellt seyn, und das Einfachste, was sich hiernach zur Zeichnung der Parallelkreise darbietet, ist zu versuchen, ob sich diese nicht ebenfalls durch gerade, parallele und auf den projicirten Meridianen senkrecht stehende Linien andeuten lassen.

193) Fig. LX bedeute RS eine Loxodromie; man ziehe zwei unendlich nahe Meridiane PA, PC und den Parallelkreisbogen AB, so wird das in B rechtwinkelige Elementar-Dreieck ABC entstehen.

Gesetzt nun der Meridian PCM werde in P'C'M' projicirt, und die Gerade S'R' stelle die Loxodromie SR vor; dann muß, wenn die Charte die aufgegebenen Bedingungen erfüllen soll, der Winkel $A'C'B' = ACB$ seyn. Ist also $A'B'$ auf $P'M'$ senkrecht, das heißt, stellt es den Parallelkreis-Bogen AB vor, so sind die Dreiecke $A'B'C'$, ABC ähnlich und man hat $B'C' : B'A' = BC : BA$.

Wie nun auch immer der Meridian MC auf die Linie $P'M'$ entwickelt werden müsse, so ist $M'C'$ eine gewisse Function von der Breite von C und nur von dieser, weil $M'C'$ für alle Puncte, welche mit C gleiche Breite haben, die nämliche bleiben soll. Man setze also $M'C' = f(\lambda)$; dann ist $C'B' = d.f(\lambda)$. Ebenso wird auch $B'A'$ das Differential irgend einer Function der geographischen Länge des Punctes C, welche p heiße, seyn müssen, so daß $A'B' = d.\varphi(p)$ wird.

194) Die Bedingung, welche wir zu erfüllen haben, ist also, daß:

$$d.f(\lambda) : d.\varphi(p) = BC : BA \text{ sei. Aber}$$

$$BC = \gamma \cdot d\lambda \sin 1'' = \frac{a(1-e^2)\, d\lambda \sin 1''}{(1-e^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}};$$

$$BA = N \cos\lambda \cdot dp \cdot \sin 1'' = \frac{a \cdot dp \cdot \cos\lambda \sin 1''}{(1-e^2 \sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{Also } \frac{BC}{BA} =$$

$$= \frac{(1-e^2)\, d\lambda \sin 1''}{dp \sin 1'' (1-e^2 \sin^2\lambda) \cos\lambda}, \text{ so daß hier:}$$

$$\frac{d.f(\lambda)}{d.\varphi(p)} = \frac{(1-e^2)\, d\lambda \sin 1''}{dp \sin 1'' (1-e^2 \sin^2\lambda) \cos\lambda} \text{ seyn muß.}$$

Digitized by Google

Um dieſer Gleichung genug zu thun, ſetze man

$$\varphi(p) = C\,p \sin 1'' \text{ und } d.f(\lambda) = C.\frac{(1-e^2)\,d\lambda \sin 1''}{(1-e^2\sin^2\lambda)\cos\lambda},$$

welche nach den Potenzen von e^2 entwickelt

$d.f(\lambda) = C\left\{\frac{d\lambda.\sin 1''}{\cos\lambda} - e^2\cos\lambda.d\lambda\sin 1'' - e^4\cos\lambda\sin^2\lambda\,d\lambda\sin 1''\right\}$ giebt. Integrirt und beobachtet man, daß $\cos\lambda\,d\lambda\sin 1'' = d.\sin\lambda$ iſt, ſo wird

$f(\lambda) = C\left\{\log\text{nat.tang}\,\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda) - e^2\sin\lambda - \frac{e^4}{3}\sin^3\lambda\right\} + \text{const.}$ oder

$f(\lambda) = C.\left\{\frac{\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}{K} - e^2\sin\lambda - \frac{e^4\sin^3\lambda}{3}\right\}$. Die Größe K beträgt 0,4342945 [ſiehe (10)] und die const. iſt o, weil mit $\lambda = o$ auch $f(\lambda) = o$ iſt.

Die Gleichung $\varphi(p) = C\,p\sin 1''$ zeigt, daß die Zwiſchenräume der Meridiane auf der Charte für gleiche Längenunterſchiede gleich ſind. Um nun die willkührliche Größe C zu beſtimmen, nehme man die Entfernungen der Meridiane auf der Charte denen gleich, welche ſie auf dem Equator haben; dann iſt $\varphi(p) = ap\sin 1''$ oder, wenn p in Graden gegeben iſt $\varphi(p) = \frac{a.p.\pi}{180}$, alſo $C = a$, und folglich

$$f(\lambda) = a\left\{\frac{\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}{K} - e^2\sin\lambda - e^4\frac{\sin^3\lambda}{3}\right\}.$$

Will man die Excentricität nicht beachten, ſo iſt blos

$$f(\lambda) = a.\frac{\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}{K}.$$

195) Soll nach den vorhergehenden Formeln ein Netz von Meridianen und Parallelkreiſen conſtruirt werden, ſo beſtimme man zuerſt nach Willkühr, welche Längenunterſchiede die erſtern und welche Breitenunterſchiede die letztern haben ſollen. Berechne dann für jeden Parallelkreis die $f(\lambda)$. Sind die Längenunterſchiede zweier auf einander folgenden Meridiane immer die nämlichen und gleich Δp, ſo iſt ihre Entfernung auf der Charte immer $\frac{a\pi.\Delta p}{180}$ oder $a\,\Delta p\sin 1''$, welche man daher nur ein für alle Mal zu berechnen braucht.

Mit dieſen Werthen wird es ein Leichtes ſeyn, das Netz zu zeichnen, und man kann ſich deſſelben bedienen, um Puncte, deren Längen und Breiten gegeben ſind, mit hinlänglicher Genauigkeit zu projiciren.

Digitized by Google

195) bis. Um einen Begriff davon zu erhalten, wie nützlich diese Charten den Seefahrern sind, wollen wir uns denken, daß das Schiff sich in einem Puncte A, welcher auf der Charte bezeichnet ist, befinde, und den Weg nach B einschlagen möchte. Zieht man dann die gerade Linie AB, so wird diese mit dem Meridiane einen Winkel machen, welcher dem Windstriche, den das Schiff verfolgen muß, gleich ist.

Man begreift auch, daß die Schifffahrer, welche, so oft es nothwendig ist, die Geschwindigkeit und die Richtung ihres Laufes aufzeichnen, leicht auf die Charte den zurückgelegten Weg der Länge und Richtung nach auftragen, und so die Lage des Ortes, wo sie sich befinden, ohngefähr erfahren können.

Eine numerische Anwendung von der Construction einer Seecharte siehe (252).

Viertes Kapitel.

Von den Höhenmessungen.

196) Fig. LVII. sei $\alpha\gamma$ die Meeresfläche; A und B bezeichnen zwei Puncte auf der Erde; AC die Verticale von A; BC die Verticale von B. Man denke sich durch A eine Fläche $\alpha\beta$, welche mit der Meeresfläche parallel läuft, so daß $\gamma\beta = \alpha A$ ist. Dann heißt βB die Höhe des Punctes B über dem Puncte A. Wie solche Höhen gemessen werden, wollen wir in dem gegenwärtigen Kapitel erklären.

Man kann diesen Zweck in vielen Fällen durch das gewöhnliche Nivelliren erreichen; doch würde dasselbe oft, wenn auch möglich, viel zu weitläufig seyn. Wir wollen daher hier möglichst leichte, allgemeine, und von allen Beschaffenheiten des Bodens zwischen A und B unabhängige Auflösungen unserer Aufgabe zu geben suchen. Wir werden anfangs in denselben die Erde sphärisch unterstellen, und nachher den Einfluß der Excentricität in Rechnung bringen.

197) Man nehme an, die Entfernung $A\beta$ sei gegeben und $= D$. Man messe in A die Zenithaldistanz des Punctes B *), nämlich $ZAB = \delta$. Dann ist

*) In der Praxis tritt sehr häufig der Fall ein, daß man das Instrument nicht genau an den Punct A, sondern meistens nur tiefer, jedoch fast senkrecht unter denselben, stellen kann. Die beobachtete Zenithaldistanz be-

Digitized by Google

$C = \frac{D}{AC \sin 1''}$ und $AC : BC = \sin(\delta - C) : \sin\delta$, woher:

$AC : BC - AC = \sin(\delta - C) : \sin\delta - \sin(\delta - C)$ oder:

$AC : B\beta = \sin(\delta - C) : 2 \sin\frac{C}{2} \cos\left(\delta - \frac{C}{2}\right)$ und folglich

$$B\beta = \frac{2 \,.\, AC \,.\, \sin\frac{C}{2} \,.\, \cos\left(\delta - \frac{C}{2}\right)}{\sin(\delta - C)}.$$

Da C sehr klein ist, so wollen wir den Werth von $B\beta$ nach den Potenzen von C entwickeln, und keine höhere als die zweite beibehalten; dann ist

$$B\beta = \frac{AC \,.\, C \sin 1'' \left\{\cos\delta + \sin\delta \,.\, \frac{C \sin 1''}{2}\right\}}{\sin\delta - \cos\delta \,.\, C \sin 1''} = AC \times \frac{C \,.\, \cot\delta \,.\, \sin 1'' + \frac{C^2 \sin^2 1''}{2}}{1 - \cot\delta \,.\, C \sin 1''} =$$

$$= AC \times \left\{C \cot\delta \sin 1'' + \frac{C^2 \sin^2 1''}{2}\right\} \left\{1 + C \sin 1'' \cot\delta\right\} =$$

$$= AC \times \left\{C \,.\, \cot\delta \,.\, \sin 1'' + C^2 \sin^2 1'' \cot^2\delta + \frac{C^2 \sin^2 1''}{2}\right\} =$$

$$= AC \times \cot\delta \,.\, C \,.\, \sin 1'' + AC \,.\, C^2 \sin^2 1'' \left(\cot^2\delta + \tfrac{1}{2}\right) = D \cot\delta + \frac{D^2}{AC}\left(\cot^2\delta + \tfrac{1}{2}\right).$$

Man kann hier ohne weiteres $AC = R$ (dem Radius der Erde) setzen, indem der Unterschied $A\alpha$ immer gegen R sehr klein ist. Man erhält also endlich $B\beta = D \cot\delta + \frac{D^2}{R}\left(\cot^2\delta + \frac{1}{2}\right)$. (Eine numerische Anwendung hiervon in (259).)

---

darf dann einer Correction, welche man die Reduction auf den Gipfel des Signals nennen kann, und die sich folgendermaaßen berechnen läßt.

Es sei Fig. LIX bis die Zenithaldistanz δ' beobachtet worden, da eigentlich δ zu finden war. Die Entfernung Aa des Standpunctes a von der Spitze des Signals heiße h, und die horizontale Entfernung der Puncte A und B, nämlich ab, sei D.

Betrachtet man dann die ganze Figur als geradlinig, wie es hier wohl geschehen kann, so ist:

$$aB = \frac{ab}{\sin\delta'} = \frac{D}{\sin\delta'} \text{ und } \delta - \delta' = B.$$

Ferner $aB : \sin\delta = h : \sin B$, woher $\sin B = \frac{h \,.\, \sin\delta \,.\, \sin\delta'}{D}$ oder, wenn man nur die ersten Potenzen beibehält: $B = \frac{h \sin^2\delta'}{D \sin 1''}$, welches noch zu δ' addirt werden muß, um das verlangte δ zu haben. (Numerische Anwendung in (253).)

Digitized by Google

198) Die Haupturſache, welche die genaue Meſſung einer Höhe verhindert, iſt die Wirkung der Refraction. Sie beſteht darin, daß ein Lichtſtrahl von B nach A nicht in einer geraden Linie, ſondern bei dem gewöhnlichen Zuſtande der Atmoſphäre, blos einige ſeltene Fälle ausgenommen, in einer, in der Ebene ACB liegenden, und gegen oben convexen krummen Linie AmB kömmt *). Im Puncte A iſt die Richtung dieſes Lichtſtrahles die der Tangente an AmB, welche hier durch AB′ angedeutet iſt; der Punct B, von A aus geſehen, ſcheint daher auf der Linie AB′, mithin höher als B zu liegen. Anſtatt alſo die wahre Zenithaldiſtanz ϑ zu meſſen, findet man blos eine ſcheinbare Θ, welche von ϑ um den Winkel B′AB = r verſchieden iſt; dieſen Winkel r nennen wir den Refractionswinkel **). Die Erfahrung, verbunden mit der Theorie, hat gezeigt, daß der Refractions-Winkel bei dem nämlichen Zuſtande der Luft mit C proportional iſt; das Verhältniß deſſelben zu C iſt aber ſehr veränderlich, und man hat bisher nur mittlere Werthe dieſes Verhältniſſes finden können. Für die gemäßigte nördliche Zone geben die Beobachtungen bei reinem Himmel und im Sommer ſehr nahe r = 0,08 . C. Man muß alſo in der vorhergehenden Aufgabe das beobachtete ϑ um 0,08 . C vermehren, um das wahre ϑ zu haben.

199) Wir wollen nun zeigen, wie man die vorliegende Aufgabe ohne Kenntniß des Refractions-Winkels auflöſen, und zugleich das Verhältniß $\frac{r}{C}$ beſtimmen kann.

Man beobachte in A die ſcheinbare Zenithaldiſtanz von B, und in B die ſcheinbare Zenithaldiſtanz von A; dieſe Winkel ſeien Θ, Θ′ Fig. LIX. Sind dann ϑ, ϑ′ die wahren Diſtanzen, ſo iſt Θ = ϑ − r, Θ′ = ϑ′ − r′. Nun iſt aber ϑ = BAA′ = ABC + C und ϑ′ = BAC + C, mithin ϑ + ϑ′ = ABC + BAC + C + C = 180° + C; folglich Θ + Θ′ + r + r′ = 180° + C. Da nun AmB ein ſehr kleiner Theil einer krummen Linie

*) Die Erklärung und Theorie der atmoſphäriſchen Refraction findet man unter anderen in Biot's Astronomie physique, und in deſſelben größerem Traité de physique.

**) Da man die wahre Zenithal-Diſtanz eines Punctes durch die unmittelbare Beobachtung nicht findet, könnte man glauben, die Methode, welche wir früher zur Reduction eines Winkels auf den Horizont gegeben haben, bedürfe einer von der Refraction abhängigen Berichtigung. Dieſes iſt aber nicht der Fall, denn wenn Fig. LVIII. der Winkel BAC gemeſſen und auf den Horizont reducirt werden ſoll, und die Linien AC, AB ſcheinen AC′, AB′ zu ſeyn, ſo mißt man ſtatt der drei Stücke BAC, ZAB, ZAC, die B′AC′, ZAB′, ZAC′; und da B′A mit AB und C′A mit AC in der nämlichen Verticalebene liegt, ſo kömmt offenbar das nämliche heraus, wenn man B′AC′ mit Hülfe von ZAB′, ZAC′, oder BAC mit Hülfe von ZAB, ZAC auf den Horizont reducirt.

Digitized by Google

ist, so kann man ihn mit einem Bogen seines Krümmungskreises verwechseln; dann ist aber $r = \frac{1}{2} A\,m\,B$ und $r' = \frac{1}{2} A\,m\,B$, mithin $r = r'$, und es wird: $2r = 180° + C - \Theta - \Theta'$, oder $r = 90° + \frac{C}{2} - \left(\frac{\Theta + \Theta'}{2}\right)$.

Durch die Beobachtungen von Θ und Θ' läßt sich also r, und folglich sein Verhältniß zu C finden. Man kann also die Höhe $B\beta$ nach (197) berechnen. Auch läßt sich r eliminiren, so daß die Auffindung desselben überflüßig ist.

Man hat nämlich: $\sin\delta : \sin\delta' = AC + B\beta : AC$, oder

$$\sin\delta - \sin\delta' : \sin\delta' = B\beta : AC, \text{ also: } B\beta = \frac{AC\,.\,(\sin\delta - \sin\delta')}{\sin\delta'} =$$

$$= 2AC \times \frac{\sin\left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta + \delta'}{2}\right)}{\sin\delta'}. \quad \text{Nun ist: } \delta - \delta' = \Theta - \Theta',\ \delta + \delta' = 180° + C,$$

folglich auch $\delta' = 90° + \frac{C}{2} - \left(\frac{\Theta - \Theta'}{2}\right)$, mithin $B\beta = \frac{2\,.\,AC \times \sin\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)\,.\,\sin\frac{C}{2}}{\cos\left(\frac{C}{2} + \frac{(\Theta' - \Theta)}{2}\right)}$

Diesen Werth wollen wir nach den Potenzen von C entwickeln, und keine höhere als die zweite beibehalten. Dann wird:

$$B\beta = \frac{AC\,.\,C\sin 1''\sin\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)C\sin 1''} = D\,\text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)\Big($$

$$1 + \text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right).C\sin 1''\Big) \text{ oder } B\beta = D\,\text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)\left\{1 + \frac{D}{R}\,.\,\text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)\right\}$$

(Anwendung in 254, 255, 256).

200) Wir haben in allem Vorhergehenden unterstellt, daß D gegeben sei; man kann diese Entfernung immer mittelbar oder unmittelbar messen. Wenn das letztere nicht möglich ist, so verbindet man sie durch Dreiecke mit einer andern bekannten.

Nimmt man die Refraction als gegeben an, so kann man durch die Formel $B\beta = \frac{R(\sin\delta - \sin\delta')}{\sin\delta'}$ die Höhe βB ohne Kenntniß von D finden; aber in der Ausführung würde diese Formel nur sehr wenig genau seyn; denn der kleinste Irrthum in δ oder δ' müßte einen sehr großen in $B\beta$ hervorbringen, weil δ und δ' zusammen sehr nahe 180° machen, und also $\sin\delta - \sin\delta'$ eine sehr kleine Größe ist.

Digitized by Google

Ist einer der beiden Puncte A oder B unzugänglich, so kann man es bei der Auflösung in (197) bewenden lassen; jedoch ist es möglich auch dann den Irrthum, welcher von einem nicht ganz genauen Werthe des Refractionswinkels herrühren könnte, größtentheils zu vermeiden, wenn man einen dritten Punct C finden kann, welcher von A und B beinahe gleichweit entfernt und fast eben so hoch über A, als tief unter B, liegt. Denn bestimmt man die Höhe von B über C und die von C über A, so wird man die eine fast um das Nämliche zu groß finden, als man die andern zu klein erhält; so, daß die Summe beider der wahren Höhe von B über A gleich ist.

Wenn weder A noch B zugänglich ist, so kann keine andere Methode, als die letztere angewendet werden.

201) Wir wollen nun sehen, wie man beim Höhenmessen die Excentricität der Erde beachten kann.

Fig. LXI. bedeute PM′ die Erdachse; A und H sind zwei Puncte, welche in gewissen ungleichen Höhen über der Meeresfläche liegen; PA, PA′ bezeichnen die Durchschnitte der Ebenen MPA, MPH mit einer Fläche, welche der Meeresfläche parallel ist *); HM′ und AM sind Verticalen und a, a′ bedeuten die Projectionen von A und H oder A′ auf die Meeresfläche.

Um unsere Aufgabe zu lösen, bestimme man vor allem die geographischen Lagen der Puncte a, a′ vollkommen. Nun heiße:

Die Breite von a	λ
Die Breite von a′	L′
Der Längenunterschied dieser Puncte . .	P
Die Höhe Aa = A′a′	h
Die Zenithaldistanz ZAH	ϑ
Die gesuchte Höhe HA′	H
Die geodätische Linie aa′	S
Die mit der vorigen parallele AA′ . .	D

Vorerinnerung. Die Größen N, N′ muß man hier so berechnen, daß ihre Unterschiede mit einigen Dezimalstellen genau bekannt werden. Diesen Zweck erreicht man nicht, wenn man direct die log N, log N′ sucht, weil man aus diesen die zugehörigen Zahlen nur höchstens mit 7 Ziffern, das ist im gegenwärtigen Falle bis auf die Einer,

*) Eine Fläche heißt mit einer andern gegebenen parallel, wenn sie der geometrische Ort aller Endpuncte gleicher Normalen auf die gegebene Fläche ist. Die parallele Fläche eines Ellipsoids ist selbst kein Ellipsoid.

Digitized by Google

Der nördliche Azimuth der Linie a a′ in a . . . V
Die Normale in a . . . . . N
Die Normale in a′ . . . . . N′
Die Linie MM′ c
Die Linie AM′ . . . . . $N_,$
Der Winkel MAM′ I
Unsere Aufgabe ist: H zu berechnen.

genau findet. Man berechne deshalb die Größe N durch die Formel $N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}$ oder $N = a(1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2\lambda + \frac{3}{8}e^4 \sin^4\lambda)$. Wir betrachten die Größen $L' - \lambda$, P, e^2, $\frac{S}{N}$, $\frac{h}{N}$ als von der ersten Ordnung, u. werden alles, was über die dritte Ordn. ist, vernachläßigen.

Aus (108) wissen wir, daß

1) $c = N' e^2 \sin L' - N e^2 \sin \lambda$ ist.

In dem Dreiecke AMM′ hat man: $M'A^2 = MM'^2 + MA^2 - 2MM' . MA . \cos AMM'$ oder $N_,^2 = (N+h)^2 + 2c(N+h)\sin\lambda + c^2$, woher, weil $\frac{c}{N+h}$ von der zweiten Ordnung ist . . . . 2) $N_, = N + h + c \sin\lambda$.

In dem nämlichen Dreiecke ist: $MM' : M'A = \sin MAM' : \cos\lambda$, woher $\sin I = \frac{c\cos\lambda}{N_,}$ oder . . . . . 3) $I = \frac{c\cos\lambda}{N_, . \sin 1''}$.

Nun beschreibe man aus M′ als Centrum das sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$, so ist in demselben $\alpha\beta = 90° - L'$, $\alpha = P$, $\alpha\gamma = AM'M = 90° - \lambda - I$. Man hat also, wenn $b\gamma$, a′ heißen soll:

$\cos a' = \sin L' \sin(\lambda + I) + \cos L' \cos(\lambda + I)\cos P$, oder, wenn man die cos in sinus verwandelt:

$$\sin^2\frac{a'}{2} = \sin^2\left(\frac{L' - \lambda - I}{2}\right)\left\{1 + \frac{\cos L' \cos(\lambda + I)\sin^2\frac{P}{2}}{\sin^2\left(\frac{L' - \lambda - I}{2}\right)}\right\};$$

setzt man dann 4) $\frac{\cos L' \cos(\lambda + I)\sin^2\frac{P}{2}}{\sin^2\left(\frac{L' - \lambda - I}{2}\right)} = \tan g^2 x$, so ist

$$5) \ldots \sin\frac{a'}{2} = \frac{\sin\left(\frac{L' - \lambda - I}{2}\right)}{\cos x}.$$

Für den Winkel γ hat man durch die Proportion der Sinus 6) . . . $\sin\gamma = \frac{\sin P \cos L'}{\sin a'}$; ob γ spitzig oder stumpf sei, erfährt man durch den nördlichen Azimuth der geodätischen

Digitized by Google

Linie, welchem, wie die Figur schon zeigt, γ sehr nahe gleich ist. Sollte dieß aber nicht entscheidend genug seyn, so hat man die Formel: $\cot\gamma = \frac{\text{tang}L'\cos(\lambda+I)-\sin(\lambda+I)\cos P}{\sin P}$

Es werde nun aus A als Centrum das sphärische Dreieck $\eta\varepsilon\theta$ beschrieben, so wird der Winkel $\varepsilon = 180° - \gamma$, die Seite $\theta\eta = \delta$ und $\varepsilon\theta = I$ seyn. Man findet also den Winkel η durch die Proportion der sinus, woher $\eta = \frac{I\sin\gamma}{\sin\delta}$. Ferner wird man die Seite $\eta\varepsilon$, welche t heiße nach (62) durch die Formel $\cos.t = \frac{1+\frac{\cos I\,.\,\text{tang}\,\eta}{\cos\delta\,.\,\text{tang}\,\gamma}}{\frac{\cos I}{\cos\delta}+\frac{\text{tang}\,\eta}{\text{tang}\,\gamma}}$, oder, weil $\cos I = 1$ und $\text{tang}\,\eta = \eta$ gesetzt werden muß,

$$\cos.t = \frac{\cos\delta+\frac{\eta}{\text{tang}\,\gamma}}{1+\eta\frac{\cos\delta}{\text{tang}\,\gamma}} = \left(\cos\delta+\frac{\eta}{\text{tang}\,\gamma}\right)\left(1-\frac{\eta\cos\delta}{\text{tang}\,\gamma}\right) = \cos\delta+\frac{\eta\sin^2\delta}{\text{tang}\,\gamma},$$ oder, wenn

wenn man für η seinen Werth setzt: $\cos.t = \cos\delta + I\cos\gamma\,.\,\sin\delta$, woher

$$7)\ldots\ t = \delta - I\cos\gamma.$$

Nun betrachte man das Dreieck HM'A, in welchem die Winkel $HM'A = a'$, $HAM' = 180° - t$ und die Seite $AM' = N_{,}$ bekannt sind. In diesem ist:

$HM' : AM' = \sin t : \sin(t-a')$, woher $HM' = \frac{N_{,}\sin t}{\sin(t-a)}$ und folglich die gesuchte Höhe $H = \frac{N_{,}\sin t}{\sin(t-a')} - (N'+h)$; setzt man nun den bekannten Unterschied $(N'+h)-N_{,} = d$, so wird endlich:

$$8)\ldots\ H = \frac{2N_{,}\,.\,\cos\left(t-\frac{a'}{2}\right)\,.\,\sin\frac{a'}{2}}{\sin(t-a')} - d.$$

Die vorhergehenden 8 Formeln geben die vollständige, von jeder besondern Hypothese unabhängige Auflösung unserer Aufgabe. Die Höhe h wird als gegeben angenommen; man braucht sie indessen nur ohngefähr zu kennen, weil sie immer mit sehr kleinen Größen multiplicirt vorkömmt.

Man unterstellt auch, daß δ die beobachtete, aber von der Refraction corrigirte, Zenithaldistanz sei. Den Centriwinkel, welchen man zur Auffindung dieser Correction kennen muß, darf man sphärisch berechnen.

Digitized by Google

Wenn wechselseitige Beobachtungen, wie in (199) Statt haben können, so läßt sich δ genau, und ohne die Refraction zu kennen, bestimmen. Ist aber einer der Puncte A, H unzugänglich, so kann man die Methode, welche in (200) für diesen Fall angegeben ist, befolgen. (Anwendung (261).)

202) Die Anwendung der Formeln, welche wir so eben berechnet haben, ist sehr weitläufig. Allein man kann zu einer einzigen Endformel gelangen, wenn man die Glieder dritter und höherer Ordnung vernachläßigt.

Man weiß (108), daß bei dieser Bedingung $c = a e^2 \Delta\lambda \cos\lambda$ ist, wo $\Delta\lambda = L' - \lambda$ genommen wird.

Die Formel (3) des vorigen Paragraphen giebt nun:

$$I = \frac{c\cos\lambda}{N + h + c\sin\lambda} = \frac{c\cos\lambda}{N} = \frac{c\cos\lambda}{a} = e^2\Delta\lambda\cos\lambda,$$ also das nämliche I wie in (108).

Nehmen wir nun die Formel $\cos a' = \sin L' \sin(\lambda + I) + \cos L' \cos(\lambda + I)\cos P$, und entwickeln $\sin(\lambda + I)$, $\cos(\lambda + I)$ *), so wird:

$$\cos a' = \sin L' \sin\lambda + I \sin L' \cos\lambda + \cos L' \cos\lambda \cos P - I \cos L' \sin\lambda \cos P.$$

Es sei λ' das Nämliche wie in (108), so ist $L' = \lambda' + I$, also

$$\cos a' = \sin(\lambda' + I)\sin\lambda + I\sin(\lambda' + I)\cos\lambda + \cos(\lambda' + I)\cos\lambda\cos P - I\cos(\lambda' + I)\sin\lambda\cos P,$$

oder $$\cos a' = \sin\lambda'\sin\lambda + I\cos\lambda'\sin\lambda + I\sin\lambda'\cos\lambda + \cos\lambda'\cos\lambda\cos P - I\sin\lambda'\cos\lambda\cos P - I\cos\lambda'\sin\lambda\cos P,$$

oder, weil $1 - \cos P = 2\sin^2\frac{P}{2}$ also von der zweiten Ordnung ist,

$$\cos a' = \sin\lambda'\sin\lambda + \cos\lambda'\cos\lambda\cos P.$$

Denken wir aber, daß mit dem Radius AM, aus M als Centrum, eine Kugel wie in (107) beschrieben werde, und nennen wir hier S' das Nämliche wie dort, so sind $90° - \lambda$, $90° - \lambda'$ und $\frac{S'}{N \sin 1''}$ die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes, und P ist

*) Hier ist es sehr wichtig zu bemerken, daß, weil a' selbst eine Größe von der Ordnung e^2 seyn wird, im Werthe von cos a' nur Größen 4ter Ordnung weggelassen werden dürfen, da ein Irrthum von der dritten Ordnung in cos a', einen von der zweiten in a' hervorbrächte. Denn $\cos(a' + da') = \cos a' + \sin a' . da'$; ist also $\sin a' . da'$ von der dritten Ordnung, und $\sin a'$, wie angenommen, von der ersten, so muß da' von der zweiten seyn.

Digitized by Google

der zwiſchen den beiden erſten eingeſchloſſene Winkel; man hat alſo:

$\cos \frac{S'}{N \sin 1''} = \sin\lambda' \sin\lambda + \cos\lambda' \cos\lambda \cos P$, und folglich $a' = \frac{S'}{N \sin 1''}$ oder

$a' = \frac{S}{N \sin 1''}$, weil, wie in (109) bewieſen wurde, S und S' nur in der dritten Ordnung verſchieden ſeyn können. Man wird alſo auch $\sin a' = \frac{S}{N}$ und folglich: $\sin\gamma = \frac{P \cos L'}{\frac{S}{N}}$

haben. Da aber nach (112), mit Ausſchluß der Größen dritter Ordnung,

$$P = \frac{\sin V}{\cos\lambda}\left(\frac{S}{N} + \frac{S^2}{N^2} \operatorname{tang}\lambda \cos V\right) \text{ iſt, ſo hat man:}$$

$\sin\gamma = \frac{\sin V}{\cos\lambda}\left(1 + \frac{S}{N} \operatorname{tang}\lambda \cos V\right) \cos L'$, wo keine Größe erſter Ordnung fehlt; und da man, wegen des Gebrauches, den man von $\sin\gamma$ macht, auch dieſe in ſeinem Werthe weglaſſen darf, ſo kann blos $\sin\gamma = \sin V$ oder $\gamma = V$ ſchreiben. Die Formel (7) wird dann $t = \vartheta - I \cos V$.

Um nun endlich die Formel (8) anzuwenden, müſſen wir noch

$N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2(\lambda + \Delta\lambda))^{\frac{1}{2}}}$ entwickeln. Dieſe giebt mit Ausſchluß der Glieder dritter Ordnung: $N' = N + C \sin\lambda$, ſo daß hier $N_{,} = N' + h$ iſt. Die Gleichung (8) wird demnach: $H = \frac{(N' + h)(\sin t - \sin(t - a'))}{\sin(t - a')}$; nun iſt aber $t = \vartheta - I \cos V$,

$a' = \frac{S}{N \sin 1''}$, alſo $\sin t = \sin\vartheta - I \cos\vartheta \cos V$ und

$$\sin(t - a') = \sin\vartheta - \frac{S}{N} \cdot \cos\vartheta - I \cos\vartheta \cos V - \tfrac{1}{2}\frac{S^2}{N^2} \sin\vartheta, \text{ woher}$$

$$\sin t - \sin(t - a') = \frac{S}{N} \cos\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{S^2}{N^2} \sin\vartheta \text{ und folglich:}$$

$$\frac{\sin t - \sin(t - a')}{\sin(t - a')} = \frac{\frac{S}{N} \cos\vartheta + \frac{1}{2}\frac{S^2}{N^2} \sin\vartheta}{\sin\vartheta - \frac{S}{N} \cos\vartheta} = \frac{S}{N} \cot\vartheta + \frac{S^2}{N^2}\left(\tfrac{1}{2} + \cot^2\vartheta\right).$$

Hieraus wird: $H = (N' + h)\left\{\frac{S}{N} \cot\vartheta + \frac{S^2}{N^2}\left(\frac{1}{2} + \cot^2\vartheta\right)\right\}$ und wenn man beobachtet, daß N' und N nur durch Größen zweiter Ordnung verſchieden ſind, ſo wie auch, daß $\frac{h}{N}$ von der

Digitized by Google

Ordnung e^2 ist, so wird: $H = \frac{(N+h)S}{N} \cot \delta + \frac{S^2}{N}(\frac{1}{2} + \cot^2 \delta)$. Berücksichtigt man nun endlich, daß S die Entfernung aa' bedeutet, und daß man, wie aus (116, b) hinlänglich hervorgeht, $S : D = N : N + h$ setzen kann, so wird: $\frac{S.(N+h)}{N} = D$, $\frac{S^2}{N} = \frac{D^2}{N}$ und die Endformel ist:

$$H = D \cot \delta + \frac{D^2}{N}(\tfrac{1}{2} + \cot^2 \delta).$$

Vergleicht man diese mit der aus (197), so sieht man, daß nur hier N steht, wo in jener der mittlere Werth des Erde-Radius gesetzt ist, und man bemerkt leicht, daß der hieraus entstehende Unterschied von der dritten Ordnung ist.

203) Wenn man sich im Puncte A Fig. LVII. einen Beobachter denkt, welcher von seinem Standpuncte aus über die Meeresfläche hinsehen kann, so muß ihm dieselbe da begrenzt erscheinen, wo sie von der Tangente AM berührt wird. Kann der Beobachter diese Grenze deutlich genug unterscheiden, um die Zenithaldistanz ZAM zu messen, so läßt sich daraus die Höhe des Punctes A über der Meeresfläche, nämlich $A\alpha$, bestimmen, wie folgt.

Man nehme hierzu die Erde immer sphärisch an, weil der Einfluß der Excentricität unter den Irrthümern bleibt, womit die ziemlich unsicheren Beobachtungen, von denen hier die Rede ist, behaftet sind.

Die von der Refraction corrigirte Zenithaldistanz, d. h. den Winkel ZAM, nenne man δ, so ist: $MC = AC \sin \delta$, oder $R = (R + A\alpha) \sin \delta$, woher $A\alpha = \frac{R(1 - \sin \delta)}{\sin \delta}$

Setzt man nun $\delta = 90° + Z$, so ist: $A\alpha = \frac{R(1 - \cos Z)}{\cos Z} = \frac{2R \sin^2 \frac{Z}{2}}{\cos Z}$; und da Z sehr klein seyn muß, so kann man man hier gewiß $A\alpha = R\frac{Z^2}{2} \sin^2 1''$ schreiben, weil man dadurch nur Größen von der 4ten Ordnung vernachläßigt.

Es ist aber offenbar $Z = C$, und, wenn man das constante Verhältniß $\frac{r}{C} = n$ setzt, $r = nZ$. Heißt also Θ die beobachtete Zenithaldistanz, so ist $\Theta = \delta - r = 90° + (1-n)Z$, woher $Z = \frac{\Theta - 90°}{1-n}$ und folglich $A\alpha = \frac{R \sin^2 1''}{2(1-n)^2}(\Theta - 90°)^2$ wird, wo $\Theta - 90°$ in Secunden ausgedrückt seyn muß. (Numerische Anwendung in (262).)

Digitized by Google

Gebrauch d. Barometers beim Höhen-Messen.

204) Die Theorie des Höhen-Messens mit dem Barometer beruht theils auf physikalischen Sätzen, theils auf einer mathematischen Entwickelung. Es gehört nicht zum Zwecke dieses Werkes, über die erstere mit Ausführlichkeit zu sprechen; wir werden uns deshalb damit begnügen, diese Sätze blos anzuführen; sie sind folgende:

a) Die elastische Kraft der Luft ist der Druck, welchen sie auf die Flächeneinheit ausübt. Diese Flächeneinheit ist zwar willkührlich; wenn aber mehrere elastische Kräfte mit einander verglichen werden sollen, so muß sie für alle diese Kräfte die nämliche seyn.

b) Bei gleichen Temperaturen sind die elastischen Kräfte zweier Luftmassen mit ihren Dichtigkeiten in Proportion.

c) Wenn die Dichtigkeit einer Luftmasse die nämliche bleibt, so wächst ihre elastische Kraft, für jede Temperatur-Erhöhung von 1 Grad des hunderttheiligen Thermometers, um 0,00375 dessen, was sie bei der Temperatur 0 war.

d) Nimmt man daher als Maasstab der elastischen Kräfte diejenige an, welche bei einer Dichtigkeit 1 und bei der Temperatur 0 Statt hat, und nennt sie a, so muß für die Dichtigkeit D und die Temperatur t, die zugehörige elastische Kraft

$$\varepsilon = a\,D\,(1 + 0{,}00375\,.\,t)$$ seyn.

e) Wenn sich die Temperatur der Atmosphäre erhöht, so löst diese eine größere Menge Dämpfe auf, deren elastische Kraft sich zu der der Luft addirt. Dieses ist in der Angabe d) nicht beachtet, weshalb der dortige Coefficient 0,00375 etwas zu klein ist. Die Erfahrung hat gezeigt, daß er besser auf 0,004 gebracht wird. Man schreibe also:

$$\varepsilon = a\,.\,D\,.\,(1 + 0{,}004\,.\,t)$$

f) Das Gewicht eines Körpers ist dem Producte aus seinem Inhalte, seiner Dichtigkeit und der Schwerkraft gleich.

g) In verschiedenen Höhen über der Meeresfläche stehen die Schwerkräfte im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen vom Centrum der Erde.

h) Die Schwerkraft wechselt auch mit der geographischen Breite des Ortes, wo man sich befindet, und zwar so, daß, wenn diejenige, welche zur Breite von 45° gehört, g heißt, in der Breite λ die Schwerkraft gleich $g\,(1 - 0{,}002837\,.\,\cos 2\lambda)$ ist.

i) Heißt also g' die Schwerkraft, welche für die Breite λ und in einer Höhe z über der Meeresfläche Statt findet, und R der Erde-Radius, so ist:

$$g' = \frac{g\,(1 - 0{,}002837\,.\,\cos 2\lambda)\,.\,R^2}{(R + z)^2}.$$

Digitized by Google

205) Nach diesen Verhältnissen wollen wir zur mathematischen Behandlung unserer Frage schreiten, und suchen, wie die elastische Kraft der Luft in Function von der Höhe über der Meeresfläche ausgedrückt werden könne?

Man denke sich eine, auf der Flächeneinheit als Grundfläche stehende, cylindrische Luftsäule, welche sich von der Meeresfläche an in verticaler Richtung durch die ganze Atmosphäre ausdehnt. Dann wird in jedem Puncte dieser Säule, die elastische Kraft der Luft, dem Drucke des ganzen oberhalb des Punctes befindlichen Theiles unseres Cylinders das Gleichgewicht halten; und folglich ist in jedem Puncte die elastische Kraft der Luft dem Gewichte der darüber stehenden Säule gleich.

Man theile nun den ganzen Cylinder in unendlich kleine horizontale Schichten; so darf man die Dichtigkeit und die Schwerkraft als die nämlichen in einer und derselben Schichte betrachten. Nennt man also in einer gewissen Höhe z über der Meeresfläche die Dichtigkeit der Luft D, die Schwerkraft g', die elastische Kraft der Luft ε, so ist nach f) (204) das Gewicht der kleinen Schichte von z bis $z+dz$ gleich $g' . D . dz$. Dieses Gewicht ist nun, wie vorhin gezeigt wurde, der Abnahme gleich, welche die elastische Kraft der Luft von der Höhe von z bis $z+dz$ leidet. Man hat also:

$$d\varepsilon = -g' . D . dz .$$ (das Zeichen —, weil ε abnimmt, wenn z wächst.)

Nun ist auch nach e) (204) $\varepsilon = a . D . (1+0{,}004 . t)$, also:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{g'}{a(1+0{,}004 . t)} . dz;$$ oder, wenn man für g' seinen Werth aus i) (204) setzt:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{g(1-0{,}002837 . \cos 2\lambda)}{a(1+0{,}004 . t)} \frac{R^2 . dz}{(R+z)^2}$$

a, g, λ und R sind hier von z ganz unabhängig; hingegen ist t eine gewisse Function desselben, welche man aber noch nicht zuverläßig kennt. Man kann aus dieser Ursache nichts anderes thun, als auch t constant annehmen, und wir werden weiter unten sehen, welchen Werth man dieser Größe giebt. Dieß vorausgesetzt, läßt sich die obige Gleichung integriren, und es wird: $\log . nat\, \varepsilon = m . \frac{1}{R+z} + const.$, wenn man der Kürze halber

$m = \frac{g(1-0{,}002837 . \cos 2\lambda) R^2}{a(1+0{,}004 . t)}$ schreibt. Setzt man die Zahl $0{,}434295 = K$, so wird $\log \varepsilon = m . K . \frac{1}{R+z} + const.$ Nennt man nun ε' den Werth von ε auf der Meeresfläche,

Digitized by Google

das heißt, wo $z = o$ ist, so hat man: $\log \varepsilon' = m \,.\, K : \frac{1}{R} + \text{const.}$ und folglich:

$$\log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{m \,.\, K}{R} \cdot \frac{z}{R+z} = \frac{mK}{R^2} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{R}}.$$

206) Um zu zeigen, wie die vorhergehende Theorie auf Barometer-Beobachtungen angewendet werden könne, denken wir uns, daß an einen Punct der Meeresfläche, dessen geographische Breite λ sei, ein Barometer gebracht werde. Die Fläche welche das Queckſilber dem Drucke der Luft darbietet sei n. Die Höhe des Barometerſtandes heiße h; die Schwerkraft, welche hier $g(1 - 0{,}002837 \cos 2\lambda)$ ist, heiße $g_{,}$; die Temperatur des Queckſilbers nenne man T; die Dichtigkeit des Queckſilbers bei dieſer Temperatur sei δ'; dieſelbe Größe für die Temperatur 0 heiße δ.

Der Druck, welchen die Luft auf die Fläche n ausübt, ist offenbar $n\varepsilon'$, weil ε' denſelben Druck auf die Flächeneinheit angiebt. Dieſes $n\varepsilon'$ muß dem Widerſtande des gehobenen Queckſilbers, das heißt, dem Gewichte einer Queckſilberſäule von h Höhe und n Grundfläche gleich seyn. Man hat alſo: $n\varepsilon' = h \,.\, n \,.\, \delta' g_{,}$, oder $\varepsilon' = h \,.\, \delta' \,.\, g_{,}$. Man weiß aber, daß die Dichtigkeit des Queckſilbers für jede Temperaturerhöhung von 1 Grad des hundertheiligen Thermometers um $\frac{1}{5412}$ deſſen, was ſie bei 0 war, abnimmt; ſo, daß

$\delta' = \delta\left(1 - \frac{T}{5412}\right)$ und folglich $\varepsilon' = \delta\left(1 - \frac{T}{5412}\right) h \,.\, g_{,}$ ist.

Es ſei nun in der Höhe z über der Meeresfläche der Barometerſtand h' und die Temperatur des Queckſilbers T', ſo wird man ebenſo wie vorhin $\varepsilon = \delta\left(1 - \frac{T'}{5412}\right) h' g'$ finden. Demnach iſt alſo: $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{h\, g_{,}\left(1 - \frac{T}{5412}\right)}{h' g'\left(1 - \frac{T'}{5412}\right)} = \frac{h}{h'} \frac{(R+z)^2}{R^2}\left(1 - \frac{T - T'}{5412}\right)$, wo höhere Potenzen von $\frac{T}{5412}$ weggelaſſen ſind, welches ganz unbedeutend iſt. Aus dieſer Gleichung wird nun auch $\log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \log\left\{\frac{h}{h'}\left(1 - \frac{T - T'}{5412}\right)\right\} + 2 \log\left(1 + \frac{z}{R}\right)$.

Die Temperatur der Luft, welche wir t genannt haben, darf, den Erfahrungen gemäß, der halben Summe der Temperaturen an beiden Standpuncten gleich genommen werden;

Digitized by Google

heißen dieſe Θ und Θ', ſo muß man alſo in die Größe m ſtatt t den Werth $\frac{\Theta + \Theta'}{2}$ ſchreiben.

In Folge alles Vorhergehenden zieht man aus der Endformel des Paragraphen (205) die Gleichung *)

$$1) \ldots z = \frac{a}{K \cdot g}\left\{1 + 0{,}002837 \cos 2\lambda\right\}\left\{1 + \frac{2(\Theta + \Theta')}{1000}\right\}$$
$$\left[\log\left\{\frac{h}{h'}\left(1 - \frac{T - T'}{5412}\right)\right\} + 2\log\left(1 + \frac{z}{R}\right)\right]\left\{1 + \frac{z}{R}\right\}.$$

Wir haben bisher immer unterſtellt, daß der untere Standpunct auf der Meeresfläche ſei. Indeſſen ſieht man ſogleich, daß alles Geſagte ſich auf den Fall anwenden ließe, wo der untere Standpunct ſelbſt in einer gewiſſen Höhe über der Meeresfläche läge, wenn man nur dieſe Höhe noch zu R addirte. Dieſe Veränderung wird aber einen ſo geringen Einfluß auf den Bruch $\frac{z}{R}$ haben, daß man ſie ganz vernachläßigen, und ohne Weiteres unſere Formel (1) als für jeden beliebigen untern Standpunct gültig anſehen kann.

Der Coefficient $\frac{a}{K\,g}$ wird am gewiſſeſten gefunden, wenn man eine Höhe trigonometriſch ganz genau beſtimmt, und zugleich den Stand des Barometers und des Thermometers beobachtet. Werden dann die Werthe von z, λ, Θ, Θ', h, h', T, T' und R in die Formel ſubſtituirt, ſo kann man $\frac{a}{K\,g}$ daraus ziehen. Auf dieſe Art hat Hr. Ramond durch ſehr genaue Verſuche $\frac{a}{K\,g} = 18336$ Meter gefunden.

Will man nnn eine Höhe z durch die Formel (1) finden, ſo berechne man zuerſt den Werth von z, indem man den Bruch $\frac{z}{R}$ weglaſſe. Das ſo gefundene angenäherte z iſt hinreichend genau, um in den Bruch für z geſetzt werden zu können. Thut man dieß, ſo giebt die Formel den genauen Werth der Höhe. (Anwendung (263).)

---

*) Die Formel (1) iſt diejenige, welche man in der Hydroſtatik von Poiſſon findet, deſſen überaus klaren und ſchönen Gang wir hier im Weſentlichen befolgt haben. Sie iſt in der Hauptſache mit der von Laplace einerlei.

Digitized by Google

207) Wenn die Höhe, welche bestimmt werden soll, nicht sehr groß ist, so kann man den Bruch $\frac{z}{R}$ als Null betrachten und die Formel (1) wird:

$$2)\quad z = \frac{a}{K\,g}\,(1 + 0{,}0002837\,\cos 2\lambda)\left\{1 + \frac{2(\Theta+\Theta')}{1000}\right\}\log\frac{h}{h'}\left\{\left(1 + \frac{T-T'}{5412}\right)\right\}$$

Der Coefficient $\frac{a}{K\,g}$ muß aber dann gleich 18393 Meter genommen werden. (Anwendung (264).)

208) Es bleibt uns noch übrig Einiges über den Gebrauch des Barometers beim Höhen-Messen zu sagen.

Das Barometer, dessen man sich bedient, kann sowohl ein Heber- als Gefäß-Barometer seyn; jedoch giebt man dem ersten aus folgender Ursache den Vorzug. Die gewöhnlich enge Barometer-Röhre wirkt auf das Queckſilber als Haarröhrchen in der Art, daß das Queckſilber nicht so hoch steigt, als es ohne diese Einwirkung thun würde. In einem Heber-Barometer compenſiren ſich aber die in beiden Aesten der Röhre gleich starken Kräfte; da hingegen im Gefäß-Barometer die Capillarität des engern Theils der Röhre auf den Barometerſtand ihren ganzen Einfluß behält. Zwar kann man, wenn der Durchmeſſer dieſer engern Röhre bekannt iſt, die Erniedrigung des Queckſilbers in folgender von Laplace berechneten Tabelle finden, und ſie zu dem beobachteten Barometerſtande addiren; allein dieſe Weitläufigkeiten ſind, wie geſagt, durch den Gebrauch des Heber-Barometers gänzlich zu vermeiden.

Digitized by Google

Innerer Durchmesser der Röhre in Millimetern angegeben.	Erniedrigung des Queckſilbers in Millimetern angegeben.
2	4,5599
3	2,9023
4	2,0388
5	1,5055
6	1,1482
7	0,8813
8	0,6851
9	0,5354
10	0,4201
11	0,3506
12	0,2602
13	0,2047
14	0,1597
15	0,1245
16	0,0970
17	0,0754
18	0,0586
19	0,0430
20	0,0352

In Betreff auf die richtige Beurtheilung des Barometerſtandes iſt noch zu bemerken, daß die Reibung des Queckſilbers an dem Glaſe, oft das Sinken oder Steigen deſſelben einigermaaßen hindert; deshalb iſt es nöthig, wenn ein Barometer lange ruhig gehangen hat, daſſelbe erſt in eine kleine Bewegung zu bringen, und dann nach erfolgter Ruhe ſeinen Stand zu beobachten. —

Wir haben in unſerer Theorie unterſtellt, daß die Temperatur des Queckſilbers im Barometer bekannt ſei. Sie wird durch ein Thermometer gemeſſen, welches in Berührung mit der Barometer-Röhre iſt. Wenn dieſes nicht angebracht wäre, ſo könnte man ohne merklichen Irrthum die Temperatur des Queckſilbers der Temperatur der Luft gleich ſetzen. —

Digitized by Google

Wir wollen noch einige interessante Bemerkungen hier hin setzen, welche Hr. Ramond bei seinen vielfältigen Versuchen gemacht hat, und die wir aus Biot's Astronomie physique entnehmen.

1) Wenn man ganz genaue Messungen machen will, so müssen gleichzeitige Beobachtungen an den beiden Puncten, deren Höhe über einander bestimmt werden soll, Statt finden.

2) Im Allgemeinen werden die Höhen zu klein gefunden,

wenn der untere Standpunct in einer Ebene und der obere in einer engen und tiefen Bergschlucht ist; oder

wenn man des Morgens oder am Abende beobachtet, oder wenn heftige südliche Winde wehen; endlich

wenn stürmisches Wetter ist; und in diesem Falle sind sehr große Irrthümer zu befürchten.

3) Man findet die Höhen zu groß,

wenn man zwischen 12 und 2 bis 3 Uhr, besonders im Sommer, und an Plätzen, welche den Sonnenstrahlen ausgesetzt sind, beobachtet; ferner

wenn der obere Standpunct auf der Spitze eines Berges und der untere in einem engen Thale ist; endlich

wenn heftige nördliche Winde wehen.

209) Wenn man die Höhe zweier Puncte übereinander mit dem Barometer gemessen hat, und man beobachtet in jedem derselben die Zenithaldistanz des andern, so läßt sich die horizontale Entfernung der Puncte ziemlich genau bestimmen, wie folgt:

Man nenne die Zenithaldistanzen . . . . . Θ, Θ'.
Die horizontale Entfernung der Puncte . . . . . D.
Die Höhe derselben übereinander . . . . . h.

Dann ist aus (199) $h = D \cdot \text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right) + \frac{D^2}{R} \text{tang}^2\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)$; mithin

$$D = h \cdot \frac{1}{\text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)} - \frac{D^2}{R} \text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)$$

oder, weil man nur Größen zweiter Ordnung beibehält:

$$D = \frac{h}{\text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)} - \frac{h^2}{R \text{tang}\left(\frac{\Theta' - \Theta}{2}\right)}.$$

Digitized by Google

Dritter Theil.

Formulare zu trigonometrischen Berechnungen.

Vorläufige Bemerkungen.

Um unsere Rechnungs-Formulare zu verstehen, sind einige Bemerkungen über ihre Einrichtung nothwendig, welche in folgenden Sätzen gegeben werden.

a) Das Zeichen — über der Characteristik eines Logarithmen zeigt an, daß diese allein negativ ist. Wir brauchen keine ganz negative Logarithmen; die Decimalbrüche derselben sind immer positiv.

b) Die negative Characteristik hat so viele Einheiten, als auf der wievielten Stelle nach dem Decimal-Comma die geltenden Ziffer der dem Logarithmen zugehörigen Zahl anfangen.

c) Wenn in unsern Formularen — log. steht, so wird diese Größe folgendermaaßen erhalten. Man nehme den log., ziehe die letzte geltende Decimalziffer von 10 und die übrigen Decimalziffern von 9 ab; vermehre dann die Characteristik um 1 und gebe ihr das entgegengesetzte Zeichen. (Siehe auch die Note zu (30).)

Z. B. $\log a = 3{,}47829$, $\log a = \bar{1}{,}34243$, $\log a = \bar{3}{,}78527$

— $\log a = \bar{4}{,}52171$, — $\log a = 0{,}65757$, — $\log a = 2{,}21473$.

d) Die Logarithmen der sinus, cosinus, tang. und cot., welche man in den Tafeln findet, sind alle um 10 zu groß, weshalb wir immer von ihrer Characteristik 10 abziehen. Eine Ausnahme hiervon bilden nur die log. der tang. über 45° oder der cot. unter 45° in den Tafeln von Callet. (21)

Digitized by Google

e) Wenn Winkel vorkommen, welche größer als 90° sind, so hat man dabei folgendes zu beobachten:

für Winkel zwischen 90° und 180° sind die sinus positiv, die cos., tang. und cotang. negativ; übrigens ist:

$$\sin(90° + a) = \cos a$$
$$\cos(90° + a) = \sin a$$
$$\tang(90° + a) = \cot a.$$
$$\cot(90° + a) = \tang a.$$

Für Winkel zwischen 180° und 270° sind sinus und cosinus negativ, tang. und cotang. positiv; übrigens:

$$\sin(180° + a) = \sin a, \quad \tang(180° + a) = \tang a$$
$$\cos(180° + a) = \cos a, \quad \cot(180° + a) = \cot a.$$

Für Winkel zwischen 270° und 360° sind sin., tang. und cot. negativ, cos. positiv, übrigens:

$$\sin(270° + a) = \cos a, \quad \cos(270° + a) = \sin a, \quad \tang(270° + a) = \cot a,$$
$$\cot(270° + a) = \tang a.$$

f) Wenn es geschieht, daß eine Größe, deren log. genommen werden soll, negativ ist, so hat man darauf beim Aufsuchen des Logarithmen keine Rücksicht zu nehmen.

g) Vom Paragraphen (222) an bedeuten die Buchstaben a, b, e^2, ε, R immer das Nämliche, so wie es in (222, c) gesagt ist. Der Werth von R ist in (76) angegeben und beträgt 6366198 Meter. Die Größen a, b, e^2 findet man in (104), woher:

$$a = 6376984 \text{ Meter}, \quad b = 6356324 \text{ Meter}, \quad e^2 = 0{,}0064691.$$

Um ε zu finden hat man folgende Rechnung zu machen:

$$\log(a+b) = \ldots\ldots\ldots$$
$$\log(a-b) = \ldots\ldots\ldots$$
$$-2\log b = \ldots\ldots\ldots$$
$$\log \varepsilon = \ldots\ldots\ldots$$

ε und e^2 sind abstracte Zahlen und bleiben also immer die nämlichen, welches Maaß man auch gebrauche. Aber a und b und R sind hier in Metern ausgedrückt, welches unterstellt, daß auch die übrigen in der Rechnung vorkommenden Linien mit dem Meter ausgemessen seien. Ist dies nicht der Fall, so muß man die Werthe von a, b, R auch in dasjenige Maaß verwandeln, dessen man sich im Uebrigen bedient hat. Zu diesem

Digitized by Google

Zwecke muß man wissen, daß der richtige Werth des Meters = 0,5130740 von der alten französischen Toise ist, welche 6 pariser Fuß beträgt *).

h) Man findet einigemal in unsern Formularen den Ausdruck log const.; dieser bedeutet einen constanten Logarithmen, das heißt einen solchen, welcher für immer oder doch für einige Fälle unveränderlich ist.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Seiten der Dreiecke eines trigonometrischen Netzes.

210) Schema zu einer trigonometrischen Feldnote.

Vorerinnerung. Das nachstehende Schema kann entweder in der hier gebrauchten Form, oder auch als Uebersichts-Tabelle abgefaßt seyn. Letztere erfordert ein größeres Format. — Zur Erläuterung siehe (89, a, b, c) **).

Am 15ten Juni 1793,
wurde mit dem Wiederholungskreise ein Winkel unter folgenden Umständen gemessen.

Das Centrum der Stellung war das Signal zu Poloponia
Zur Rechten hatte man den Thurm zu Calamite.
Zur Linken . . . . den Thurm von Capane.

Entfernung $d = \overset{\text{Met.}}{0,9}$ Winkel $y = 101°, 15', 32'', 4$ — NB. Wenn man im Centrum der Stellung gemessen hat, so bleibt diese Zeile weg.

Zenithal-Distanz von { Calamite $= 89°, 41', 54'', 6$ / Capane $= 88°, 49', 15'', 6$ } — NB. Wenn man ein Instrument braucht, welches unmittelbar horizontale Winkel giebt, so braucht man keine Zenithal-Distanzen zu messen.

Gemessener Winkel $p = 32°, 20', 18'', 06$.

Bemerkungen. Die Beobachtung war durch etwas Wind gestört ***).

*) S. Biot Astronomie physique 2ième edition p. 171.

**) Die Größen d und y sind, wie die citirte Stelle ausweißt, die Haupt-Elemente der Reduction auf das Centrum der Stellung. Eine sichere Regel um y zu erhalten, ist folgende: man richte beide Diopter des Winkelmessers auf den Gegenstand zur Linken, und drehe das eine derselben von dem gemessenen Winkel p ab, bis es auf das Centrum der Stellung zeigt, so wird dieses Diopter einen Bogen durchloffen haben, welcher = y ist. (Im Anhang siehe (27).)

***) Alles was in diesem Schema mit durchschossener Schrift angegeben ist, kann vorläufig gedruckt werden. Das Uebrige füllt man bei jeder Station schriftlich aus.

Digitized by Google

211) Aus der Feldnote werden die uncorrigirten Winkel ausgezogen, und drei und drei, so wie sie zum nämlichen Dreiecke gehören, zusammengeschrieben; die Dreiecke sind so numerirt, daß dasjenige, in welchem die Basis liegt, mit Nr. 1, und die übrigen nach der Ordnung bezeichnet sind, wie sie mit diesem ersten zusammenhängen.

Man bildet dann folgende Tabelle, wo die Logarithmen nur mit fünf Decimalstellen genommen werden.

Nr. d. Dreiecke.	Angenäherte Berechnung der Seiten der Dreiecke.			
	Spitze des Winkels.	Uncorrigirte Winkel.	log. ihrer sinus.	log. der Seiten, welche d. Winkeln gegenüberstehen
1	Calamite.	91°, 30′, 9″, 18	$\bar{1}$,99985	4,55443
	Poloponia.	32°, 20′, 18″, 06	$\bar{1}$,72829	4,28287
	Capane.	56°, 9′, 34″, 20	$\bar{1}$,91939	4,47397
2	Fanal.	97°, 43′, 53″, 544	$\bar{1}$,99603	4,28287
	Calamite.	48°, 31′, 49″, 548	$\bar{1}$,87466	4,16150
	Capane.	35°, 45′, 00″, 00	$\bar{1}$,74474	4,03158

Erläuterung.

Man schreibt die Eckpuncte der Dreiecke so untereinander, daß der Winkel, welcher der bekannten Seite gegenüberliegt, zuerst steht. So ist im Dreiecke Nr. 1 die Seite Poloponia — Capane die Basis des Netzes, und deshalb ist ihr gegenüber liegender Winkel Calamite zuerst gesetzt. In Nr. 2 kennt man die Seite Calamite — Capane aus dem vorhergehenden Dreiecke; aus dieser Ursache wird der Winkel Fanal zuerst geschrieben.

Die vierte Columne füllt man nach folgendem Rechnungs-Formulare aus:

Digitized by Google

log. der bekannten Seite = ...
— log. sin. ihres gegenüberl. Wink. = ...
log. sin. des Winkels, welcher der
unbekannten Seite gegenüber steht = ...
log der unbekannten Seite =

Zum Beispiele in dem Dreiecke Nr. 2.

log Calamite — Capane = 4,28287
— log sinus Fanal = 0,00397
log sinus Calamite = $\bar{1}$,87466
log Fanal — Capane = 4,16150.

212) Formulare zur Reduction der Winkel auf das Centrum der Stellung (89, c).

Man findet in der Feldnote: Gemessener Winkel = ... = p
Winkel y = ...
p + y = ...
Entfernung d = ...

Die Tabelle des vorhergehenden Paragraphen giebt:

log. der ohngefähren Entfernung des Gegenstandes zur Rechten; log. r = ...
log. der ohngefähren Entfernung des Gegenstandes zur Linken; log. l = ...

Nun ist folgende Rechnung zu machen.

log d = ...	log d = ...
log sin (p + y) = ...	log sin y = ...
— log r = ...	— log l = ...
— log sin 1″ = ...	— log sin 1″ = ...
log des 1ten Th. = ...	log des 2ten Th. = ...

1ter Theil = ... hat das Zeichen von sin (p + y)
davon: 2ter Theil = ... hat das Zeichen von sin y.
Rest = ...
dazu: gemessener Winkel = ...
Reducirter Winkel = ...

Digitized by Google

Nehmen wir das Beispiel aus (210):

$p = 32°, 20', 18'', 06$ $\quad$ Met. $\log r = 4{,}47397$

$y = 101°, 15', 32'', 4$ $\quad d = 0{,}9.$ $\log l = 4{,}55443.$

$p + y = 133°, 35', 50'', 46$

$\log d = \bar{1}{,}95424$	$\log d = \bar{1}{,}95424$
$\log \sin (p+y) = \bar{1}{,}85986$	$\log \sin y = \bar{1}{,}99156$
$-\log r = \bar{5}{,}44557$	$-\log l = \bar{5}{,}52603$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
log 1ten Th. $= 0{,}57410$	log 2ten Th. $= 0{,}78626$

1ter Theil $= +3'', 75$

2ter Theil $= +6'', 11$

Rest $= -2'', 36$

Gemessener Winkel $= 32°, 20', 18'', 06$

Reducirter Winkel $= 32°, 20', 15'', 70.$

213) **Formulare zur Reduction eines Winkels auf den Horizont.** (89, b).

Man pflegt gewöhnlich die Winkel erst auf das Centrum und dann auf den Horizont zu reduciren.

Man hat also: Winkel am Centrum $= \ldots\ldots\ldots\ldots = A$

Ferner die Zenithaldistanzen aus der Feldnote $\begin{cases} = \ldots\ldots\ldots = \delta \\ = \ldots\ldots\ldots = \delta' \end{cases}$

NB. Wir haben hier $\frac{\delta - \delta'}{2}$ geschrieben; wäre $\delta' > \delta$, so müßte man $\frac{\delta' - \delta}{2}$ setzen. Ebenso hätte man auch, wenn $\delta + \delta' > 180°$ wäre, $\frac{\delta + \delta' - 180°}{2}$ statt $\frac{180° - (\delta + \delta')}{2}$ genommen.

$\frac{\delta - \delta'}{2} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{180° - (\delta + \delta')}{2} = \ldots\ldots\ldots$

} Diese Größen müssen in Secunden ausgedrückt seyn.

$2 \log \left(\frac{180° - (\delta + \delta')}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots$	$2 \log \left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots$
$\log \tan \frac{1}{2} A = \ldots\ldots\ldots$	$\log \cot \frac{1}{2} A = \ldots\ldots\ldots$
$\log \sin 1'' = \ldots\ldots\ldots$	$\log \sin 1'' = \ldots\ldots\ldots$
log 1ten Th. $= \ldots\ldots\ldots$	log 2ten Th. $= \ldots\ldots\ldots$

Digitized by Google

1ter Theil = ...
2ter Theil = ...
Reſt = ...
A = ...
A + Reſt, oder reduzirter Winkel = ...

Bemerkung. Wenn δ, δ' bedeutend mehr als 40′ von 90° abweichen, ſo iſt das vorherige Formular unſicher (72), wenn man bis 0″,05 genau rechnen will. Man nehme dann folgendes: (Erläuterung (89, b) mit (72) und (64).)

$A = \ldots\ldots\ldots$
$\delta = \ldots\ldots\ldots$
$\delta' = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{A+\delta+\delta'}{2} = \ldots\ldots\ldots = S$
$S - A = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{1}{2}X = \ldots\ldots\ldots$
$X = \ldots\ldots\ldots =$ dem reduzirten Winkel.

$\log\sin S = \ldots\ldots\ldots$
$\log\sin(S-A) = \ldots\ldots\ldots$
$-\log\sin\delta = \ldots\ldots\ldots$
$-\log\sin\delta' = \ldots\ldots\ldots$
$2\log\cos\frac{1}{2}X = \ldots\ldots\ldots$
$\cos\frac{1}{2}X = \ldots\ldots\ldots$

Zum Beiſpiele.

$A = 75°, 18', 46'', 346$
$\delta = 89°, 58', 12'', 8$
$\delta' = 90°, 7', 32'', 95$

$\frac{\delta+\delta'-180°}{2} = 172'', 875$
$\frac{\delta-\delta'}{2} = 280'', 075$

$2\log\left(\frac{\delta+\delta'-180°}{2}\right) = 4,47546$
$\log\text{ tang }\frac{1}{2}A = \bar{1},88743$
$\log\sin 1'' = \bar{6},68557$
$\log$ des 1ten Theils $= \bar{1},04846$

$2\log\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right) = 4,89454$
$\log\cot\frac{1}{2}A = 0,11257$
$\log\sin 1'' = \bar{6},68557$
$\log$ des 2ten Theils $= \bar{1},69268$

1ter Theil = 0″, 1118
2ter Theil = 0″, 4929
Reſt = − 0″, 381
A = 75°, 18′, 46″, 346
Reduzirter Winkel = 75°, 18′, 45″, 965.

Digitized by Google

Beiſpiel, wo das zweite Formular gebraucht wird.

$$\left.\begin{array}{rl} A = & 75°,\ 18',\ 46'',\ 346 \\ \delta = & 91°,\ 6',\ 7'',\ 9 \\ \delta' = & 90°,\ 55',\ 18'',\ 24 \\ \hline S = & 128°,\ 40',\ 6'',\ 243 \\ S - A = & 53°,\ 21',\ 19'',\ 897 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} \log\sin S = & \bar{1},8925259 \,.\, 5 \\ \log\sin (S-A) = & \bar{1},9043662 \,.\, 4 \\ -\log\sin\delta = & 0,0000803 \\ -\log\sin\delta' = & 0,0000563 \\ \hline 2\log\cos\frac{X}{2} = & \bar{1},7970288 \\ \log\cos\frac{X}{2} = & \bar{1},8985144 \end{array}\right\}$$

$$\frac{X}{2} = 37°,\ 39',\ 47'',\ 67$$

$$X = 75°,\ 19',\ 35'',\ 34.$$

Hätte man nach dem erſten Formulare gerechnet, ſo würde man

$$X = 75°,\ 19',\ 25'',\ 336$$

erhalten haben. In gegenwärtigem Beiſpiele iſt alſo der Unterſchied unbedeutend. Die Urſache davon wird leicht von denjenigen eingeſehen werden, welche die Nummer (72) aufmerkſam leſen. Sie werden zugleich darin ſehen, daß das erſte Formular um ſo weniger genau iſt, als der zu reduzirende Winkel kleiner, oder weniger von 180° verſchieden iſt.

214) Nachdem die Winkel auf das Centrum und auf den Horizont reduzirt ſind, bildet man folgende Tabelle: (zur Erläuterung ſiehe (90, 91).)

Digitized by Google

Nr. d. Dreiecke.	Genaue Berechnung der Seiten der Dreiecke nach der Methode von Legendre.				
	Spitze des Winkels.	Winkel im Horizonte und am Centrum.	Mittlere Winkel.	log. der gegenüberstehenden Seiten.	Die Seiten selbst in Toisen.
1.	Iviza.	59°, 5o′, 53″, 18	59°, 5o′, 4o″, 17	4,863o837	72959,8o
	Montgo.	78°, 4′, 9″, 47	78°, 3′, 56″, 46	4,9167457	82555,44
	Desierto.	42°, 5′, 36″, 38	42°, 5′, 23″, 37	4,7525o17	5655g.
		18o°, oo′, 39″, o3	18o°, oo′, oo″		Diese letztere war hier unmittelbar bekannt.
			NB. Die mittleren Winkel sind diejenigen, welche man erhält, wenn man von jedem Winkel den dritten Theil des Ueberschusses 39″, 03 abzieht.	NB. Diese Columne wird ausgefüllt wie in (211).	

Das hier gewählte Beispiel ist das größte Dreieck, welches je gemessen wurde.

215) Man kann die Dreiecke auch durch die Sehnen-Methode (116, 3) auflösen. Wir wollen sie auf das vorhergehende Beispiel anwenden. Als gegebene Dinge muß man haben:

Winkel im Horizonte und am Centrum — log der Seiten mit 5 Decimalstellen.

1) Iviza . . . 59°, 5o′, 53″, 18 . . . . . 4,863o7
2) Montgo . . . 78°, 4′, 9″, 47 4,91672
3) Desierto . . 42°, 5′, 36″, 38 . . . . . 4,75251.

Nun wird folgende Rechnung gemacht:

$-\log R = \bar{7},48570$
$-\log 2 = \bar{1},69897$
$-\log \sin 1'' = 5,31443$
$\log \text{const.} = \bar{2},49910$

R, welches den mittleren Erde-Radius bedeutet, muß hier in Toisen genommen werden, weil die Seiten in Toisen ausgedrückt sind.

Digitized by Google

	1.	2.	3.
log Seite =	4,86307	4,91672	4,75251
log const. =	$\bar{2}$,49910	$\bar{2}$,49910	$\bar{2}$,49910
log S. in Secunden =	3,36217	3,41582	3,25161
Seiten in Secunden =	2302″,3	2605″,0	1784″,9.

Berechnung der Sehnen-Winkel.

Winkel Iviza = 59°, 50′, 53″, 18 = A
½ Winkel Iviza = 29°, 55′, 26″, 59 = $\frac{A}{2}$

Einschließende Seiten.
2) = 2605″,0 = α
3) = 1784,9 = β
2194,9 = $\frac{\alpha+\beta}{2}$
410,05 = $\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\log\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ =	5,22566
log sin 1″ =	$\bar{6}$,68557
log cot $\frac{A}{2}$ =	0,23997
log d. 1ten Th. =	0,15120

$2\log\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ =	6,68286
log sin 1″ =	$\bar{6}$,68557
log tang $\frac{A}{2}$ =	$\bar{1}$,76013
log d. 2ten Th. =	1,12856

1ter Th. = 1″,416
2ter Th. = 13″,445
Rest = — 12″,029
dazu A = 59°, 50′, 53″, 18
Winkel der Sehnen = 59°, 50′, 41″, 15. —

Winkel Montgo = 78°, 4′, 9″, 47 = A
½ W. Montgo = 39°, 2′, 4″, 735 = $\frac{A}{2}$

Einschließende Seiten.
1) = 2302″,3 = α
3) = 1784,9 = β
2043,6 = $\frac{\alpha+\beta}{2}$
258,7 = $\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\log\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ =	4,82560
log sin 1″ =	$\bar{6}$,68557
log cot $\frac{A}{2}$ =	0,09109
log d. 1ten Gl. =	$\bar{1}$,60226

$2\log\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ =	6,62076
log sin 1″ =	$\bar{6}$,68557
log tang $\frac{A}{2}$ =	$\bar{1}$,90891
log d. 2ten Gl. =	1,21524

Digitized by Google

1tes Gl. = 0″, 400
2tes Gl. = 16″, 415
Rest = — 16″, 015
dazu A = 78°, 4′, 9″, 47
Winkel der Sehnen = 78°, 3′, 53″, 455. —

Winkel Desierto = 42°, 5′, 36″, 38 = A
½ W. Desierto = 21°, 2′, 48″, 19 = $\frac{A}{2}$

Einschließende Seiten.
1) = 2302″, 3 = α
2) = 2605,0 = β

$2453{,}6 = \frac{\alpha + \beta}{2}$
$151{,}3 = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$2\log\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 4{,}35968$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$
$\log \cot \frac{A}{2} = 0{,}41477$
$\log$ 1tes Gl. $= \bar{1}{,}46002$

$2\log\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \widetilde{6{,}77962}$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$
$\log \operatorname{tang} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}58523$
$\log$ 2tes Gl. $= 1{,}05042$

1tes Gl. = 0″, 29
2tes Gl. = 11″, 23
Rest = — 10″, 94
A = 42°, 5′, 36″, 38
Winkel der Sehnen = 42°, 5′, 25″, 44. —

Aus der vorhergehenden Rechnung hat man nun:

Winkel der Sehnen.

Iviza = 59°, 50′, 41″, 15
Montgo = 78°, 3′, 53″, 455
Desierto = 42°, 5′, 25″, 44
Summe... 180°, 00′, 00″, 045.

NB. Die genauen Winkel der Sehnen müssen immer zusammen 180° betragen, weil sie einem geradlinigen Dreiecke angehören. Jedoch unterstellt dieses, daß man vorher die gemessenen Winkel nicht nur auf den Horizont und das Centrum reducirt, sondern auch von den Irrthümern der Beobachtungen, nach der im folgenden Paragraphen vorkommenden Methode befreit habe. Wäre dieses nicht geschehen, so würde die Summe der Sehnenwinkel um so viel von 180° abweichen, als die Irrthümer der Beobachtungen ausmachten,

Digitized by Google

und man müßte von jedem Sehnenwinkel den dritten Theil dieſer Abweichung ſubtrahiren. In dem gegenwärtigen Beiſpiele waren die Winkel ſchon im Voraus corrigirt und der unbedeutende Unterſchied 0″,045 kann ganz vernachläßigt werden. —

Um die Auflöſung unſeres Dreieckes zu vollenden, iſt folgende Rechnung zu machen.

Bekannte Seite: der Bogen von Montgo nach Iviza 3) = 56559 Toiſ. = a.

3 log a =	14,25750
— log 24 =	$\bar{2}$,61979
— 2 log R =	$\overline{14}$,97140
log Red. =	$\bar{1}$,84869

Reduction = 0,71 Toiſ.

a = 56559 Toiſ.

Sehne von Mont. Iviza = 56558,29 Toiſ. 3)

log Sehne von M. — I. = 4,7524962

— log sinus d. W. bei D. = 0,1737293

log sin d. W. bei M. = $\bar{1}$,9905086

Die hier genannten Winkel ſind die oben berechneten Winkel der Sehnen.

log Sehne von I. — D. = 4,9167341; Sehne von J. — D. = 82553,219 Toiſ. .... 2)

log Sehne von M. — I. = 4,7524962

— log sinus W. D. = 0,1737293

log sinus W. I. = $\bar{1}$,9368476

log Sehne M. — D. = 4,8630731; Sehne M. — D. = 72958,033 Toiſ. .... 1)

Man findet nun die Bogen zu den Sehnen wie folgt:

3 log Sehne =	14,75022
— log 24 =	$\bar{2}$,61979
— 2 log R =	$\overline{14}$,97140
log Reduction =	0,34141
Reduction für 2) =	2,195 Toiſ.
Sehne 2) =	82553,219
Bogen 2) =	82555,414

2 log Sehne =	14,58921
— log 24 =	$\bar{2}$,61979
— 2 log R =	$\overline{14}$,97140
log Reduction =	0,18040
Reduction für 1) =	1,515 Toiſ.
Sehne 1) =	72958,033
Bogen 1) =	72959,548

Durch die Methode von Legendre (214) erhielten wir:

Bogen 2) =	82555,44
Unterſchiede ...	0,03 Toiſ.

Bogen 1) =	72959,80
.....	0,25 Toiſ.

Digitized by Google

Anmerkung. Diese Unterschiede sind sehr klein, besonders der erste, welcher schon aus den Unrichtigkeiten der Logarithmen-Tafeln zu erklären wäre. Der zweite dürfte zum Theil auch der nämlichen Ursache zuzuschreiben seyn. — Stellt man die gegenwärtige Rechnung mit der in (116, 3) zusammen, so wird man sich versichert finden, daß die Sehnen-Methode immer durch die weit kürzere von Legandre ersetzt werden könne.

216) Will man die Summe der Irrthümer, welche man in den Messungen der Winkel eines Dreieckes begangen hat, kennen, so ist folgende Rechnung zu machen. (Erläuterung (67, 90.))

Zum Beispiel.

Man habe:

Winkel im Horizont und am Centrum.		Angenäherte log. der gegenüberstehenden Seiten in Metern.
1)	$= 75°, 18', 45'', 965$	4,61962
2)	$= 69°, 20', 48'', 50$	4,60520
3)	$= 35°, 20', 29'', 13$	4,39631
Summe	$= 180°, 00', 3'', 595$	

log Seite 1) = 4,61962
log Seite 2) = 4,60520
} Es ist willkührlich, welche zwei Seiten man nimmt.

log sin W. 3) = $\bar{1}$,76226
} Der hier gebrauchte Winkel muß derjenige seyn, welcher von den beiden vorigen Seiten eingeschlossen wird.

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$-\log \sin 1'' = 5,31443$

$-2 \log R = \overline{14},39224$
} R muß hier in Metern genommen werden, weil die Seiten in Metern ausgedrückt sind.

$\log \varepsilon = 0,39272$

$\varepsilon = 2'',47$; dies muß von dem obigen Ueberschusse der Winkel über 180°, nämlich von $3'',595$ abgezogen werden; der Rest

$+ \overline{1'',125}$ ist die Summe der Irrthümer der Beobachtungen oder Messungen. Man vergleiche (116, 3.)

Man kann die Größe ε auch anders berechnen. Man nehme zwei Seiten und die gegenüber liegenden Winkel; z. B. die Seiten 1), 2) und die Winkel 1), 2), und mache folgende Rechnung. (Erläuterung (67).)

Digitized by Google

$$-\log 4 = \bar{1},39794$$
$$-2\log R = \overline{14},39224$$
$$-\log \sin 1'' = 5,31443$$
$$\log \text{const.} = \bar{9},10461$$

$2\log$ Seite 1) $= 9,23924$	$2\log$ Seite 2) $= 9,21040$
$\log \sin 2$ W. 2) $= \bar{1},81961$	$\log \sin 2$ W. 1) $= \bar{1},69066$
$\log$ const. $= \bar{9},10461$	$\log$ const. $= \bar{9},10461$
$\log$ 1ten Th. $= 0,16346$	$\log$ 2ten Th. $= 0,00567$

$$\text{1ter Theil} = 1'',457$$
$$\text{2ter Theil} = 1,013$$
$$\text{Summe} = \varepsilon = 2'',447$$

In den folgenden Paragraphen wird man ε noch anders berechnet finden. Diese Größe ist der sogenannte sphärische Ueberschuß (51), das heißt: dasjenige, was die Summe der Winkel eines Netzdreieckes nothwendig mehr als 180° beträgt. Wenn die Seiten eines solchen Dreieckes weniger als 9000 Met. lang sind, so ist der sphärische Ueberschuß kaum 0″,05.

217) Das Vorhergehende erschöpft Alles, was für den Fall gilt, wo man die drei Winkel eines Dreieckes gemessen hat, und eine Seite desselben bekannt ist. Wir wollen nun die andern Fälle, welche die Auflösung eines Netz-Dreieckes darbieten kann, betrachten.

Nehmen wir zuerst an, die drei Seiten eines Dreieckes seien bekannt; dann muß man die Winkel berechnen wie folgt: (Erläuterung (34).)

Toiſ.	
Seite 1) $= 72959,8 = a$	$\log S = 5,0254579$
Seite 2) $= 82555,44 = b$	$\log (S-a) = 4,5195303$
Seite 3) $= 56559\,..\, = c$	$\log (S-b) = 4,3707292$
Summe $= 212074,24$	$\log (S-c) = 4,6944132$
davon die Hälfte $106037,12 = S$	$\log 4 = 0,6020600$
und folglich $33077,32 = S-a$	$19,2121906$
$23481,68 = S-b$	davon die Hälfte:
$49478,12 = S-c$	$\log$ const. $= 9,6060953.$

Nun berechnet man zuerst die mittleren Winkel, welche A, B, C heißen sollen. A und C sind nothwendig spitzig, weil b die größte Seite ist.

Digitized by Google

$-\log b = \bar{5},0832543$	$-\log a = \bar{5},1369163$	$-\log a = \bar{5},1369163$
$-\log c = \bar{5},2474983$	$-\log b = \bar{5},0832543$	$-\log c = \bar{5},2474983$
$\log \text{const.} = 9,6060953$	$\log \text{const.} = 9,6060953$	$\log \text{const.} = 9,6060953$
$\log \sin A = \bar{1},9368479$	$\log \sin C = \bar{1},8262659$	$\log \sin B = \bar{1},9905099$
$A = 59°, 5o', 4o'', 164$	$C = 42°, 5', 23'', 39$	$B = 78°, 3', 56'', 44$

Um nun die wirklichen Winkel zu haben, berechne man ε, und addire zu jedem der gefundenen Winkel $\frac{1}{3}\varepsilon$.

$\log b = 4,91674$	$\varepsilon = 38'', 983$	Winkel 1) $= 59°, 5o', 53'', 158$
$\log c = 4,75250$	$\frac{1}{3}\varepsilon = 12'', 994$	hieraus ..... 2) $= 78°, 4', 9'', 434$
$\log \sin A = \bar{1},93685$		..... 3) $= 42°, 5', 36'', 384$
$-\log 2 = \bar{1},69897$		
$-2 \log R = \overline{14},97140$		
$-\log \sin 1'' = 5,31443$		
$\log \varepsilon = 1,59089$	(vergleiche 214)	

218) Als zweiten Fall wollen wir denjenigen betrachten, wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man befolge dann folgendes Formular. (Erläuterung (29).)

Gegeben.

Seite 2) = ... = b
Seite 3) = ... = c
} Die größere von der kleinern abgezogen, giebt: b — c = ...

Zuerst muß man nun ε berechnen, und den dritten Theil desselben vom Winkel 1) abziehen, um den mittleren Winkel zu erhalten.

$\log b =$	$\varepsilon =$ .....
$\log c =$	$\frac{1}{3}\varepsilon =$ .....
$\log \sin$ W. 1) $=$	W. 1) $=$ .....
$-\log 2 =$	W. 1) $-\frac{1}{3}\varepsilon =$ ..... $= A$ davon
$-2 \log R =$	die Hälfte $=$ ..... $= \frac{A}{2}$
$-\log \sin 1'' =$	
$\log \varepsilon =$	

} mit 5 Decimalstellen.

Folgt nun die Berechnung der Seite a, mit 7 Decimalstellen.

Digitized by Google

Erstens.		Zweitens.	
log 4 =	. . . . .	log (b — c) =	. . . . .
log b =	. . . . .	— log cos N =	. . . . .
log c =	. . . . .	log a =	. . . . .
2 log sin $\frac{A}{2}$ =	. . . . .	a oder Seite 1) =	. . . . .
— 2 log (b — c) =	. . . . .		
2 log tang N =	. . . . .		
log tang N =	. . . . .		
N =	. . . . .		

Die Winkel 2) und 3) ergeben sich aus nachstehender Rechnung.

— log Seite 1) =	. . . . .	— log Seite 1) =	. . . . .
log sin A =	. . . . .	log sin A =	. . . . .
log Seite 3) =	. . . . .	log Seite 2) =	. . . . .
log sin C =	. . . . .	log sin B =	. . . . .
C =	. . . . .	B =	. . . . .
dazu addirt $\frac{1}{3}\varepsilon$ =	. . . . .	$\frac{1}{3}\varepsilon$ =	. . . . .
Winkel 3) =	. . . . .	Winkel 3) =	. . . . .

Man kann auch die Winkel 3) und 2) finden, ohne vorläufig a zu bestimmen. Die Rechnung ist folgende: (Erläuterung (31).)

90° =	89°, 59′, 60″, 00 . . .	— log (b + c) =	. . . . .
$\frac{A}{2}$ =	. . . . .	log (b — c) =	. . . . .
Rest =	. . . . . = $\frac{B+C}{2}$	log cot $\frac{A}{2}$ =	. . . . .
	. . . . . = $\frac{B-C}{2}$	log tang $\frac{(B-C)}{2}$ =	. . . . .
Summe B =	. . . . .	kömmt noch zu jedem $\frac{1}{3}\varepsilon$, so hat man die	
Rest C =	. . . . .	Winkel 2), 3).	

219) Wenn eine Seite mit den daran liegenden Winkeln bekannt wäre, so müßte man auch zuerst ε haben, um die Winkel in mittlere Winkel zu verwandeln. Die Rechnung ist in folgendem Beispiele dargestellt.

Digitized by Google

Gegebene Seite.	Gegebene Winkel.
Toiſ.	
1) = 72959,8	2) = 79°, 4′, 9″, 47
	3) = 42°, 5′, 36″, 38
	Summe = 120°, 9′, 45″, 85.

Berechnung von ε. (Zur Erläuterung dient, daß $\varepsilon = \frac{\text{Inhalt}}{R^2 \sin 1''}$ iſt. Der Inhalt iſt nach (36, c) berechnet.)

2 log Seite 1) =	9,72617	ε =	38″,991
— log sin Summe =	0,06318	Winkel 2) =	78°, 4′, 9″, 47
log sin W. 2) =	$\bar{1}$,99052	davon $\frac{1}{3}\varepsilon$ =	. . . . 12″, 997
log sin W. 3) =	$\bar{1}$,82629	Mittl. W. 2) =	78°, 3′, 56″, 473
— log 2 =	$\bar{1}$,69897	Winkel 3) =	42°, 5′, 36″, 38
— 2 log R =	$\bar{14}$,97140	davon $\frac{1}{3}\varepsilon$ =	. . . . 12″, 997
— log sin 1″ =	5,31443	Mittl. W. 3) =	42°, 5′, 23″, 383
log ε =	1,59096		

Summe der mittleren Winkel = 120°, 9′, 19″, 856

Dieſe Summe von 180° abgezogen, giebt den mittleren Winkel 1), woher

mittlerer W. 1) =	59°, 50′, 40″, 144
dazu $\frac{1}{3}\varepsilon$	12″, 997
Winkel 1) =	59°, 50′, 53″, 141

Die Seiten werden berechnet wie gewöhnlich:

log Seite 1) = ...	log Seite 1) = ...
— log sin m. W. 1) = ...	— log sin m. W. 1) = ...
log sin m. W. 2) = ...	log sin m. W. 3) = ...
log Seite 2) = ...	log Seite 3) = ...

220) Wenn man aus einem zu beſtimmenden Puncte, die drei Eckpuncte eines bekannten Dreieckes beobachten kann, ſo läßt ſich die Lage dieſes Punctes durch die Winkel, unter welchen die Seiten des Dreieckes erſcheinen, berechnen, wie folgt. (Erläuterung (46).)

Digitized by Google

B. Die Spitzen des Dreieckes sind A, B, C; die gegenüberstehenden Seiten
A. C. desselben sollen a, b, c heißen.
D. Der zu bestimmende Punct ist D.

Beobachtet wurden die Winkel $ADB = \alpha$ und $BDC = \beta$.

Bekannt sind, die Seiten a und c und der Winkel B.

Gesucht werden die Winkel $BAD = x$ und $BCD = y$,

ferner die Linien AD, CD.

Man unterstellt, daß die 4 Puncte nicht über 2 Stunden Weges von einander entfernt liegen. Die Formeln sind folgende: (46).

$$x + y = 360° - (\alpha + \beta + B); \quad \text{tang } \Theta = \frac{c \sin \beta}{a \sin \alpha};$$

$$\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{tang}(45° - \Theta).$$

Man muß übrigens die Zeichen von $\text{tang}\frac{x+y}{2}$ und $\text{tang}(45° - \Theta)$ sehr wohl berücksichtigen, um zu sehen, ob $\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ positiv oder negativ ist, das heißt, ob man $\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ oder $\text{tang}\left(\frac{y-x}{2}\right)$ schreiben müsse.

Hier nun ein Beispiel von der Rechnung, welche geführt werden muß.

Winkel B = 77°, 32′, 40″,8
α = 34°, 22′, 1″,5
β = 54°, 45′, 6″,2

Seite c = 10475 Meter
Seite a = 14788,38

Summe = 166°, 39′, 48″,5
360° = 359°, 59′, 60″
Rest = 193°, 20′, 11″,5 = x+y

NB. Wenn x + y genau gleich 180° wäre, so wäre die Aufgabe unbestimmt.

davon die Hälfte 96°, 40′, 5″,75 = $\frac{x+y}{2}$

log sin β = $\bar{1}$,9120407
log c = 4,0201539
— log a = $\bar{5}$,8300795
— log sin α = 0,2483416
log tang Θ = 0,0106157

Θ = 45°, 42′, 0″,66. Hier ist $\Theta > 45°$, mithin muß man statt tang(45° — Θ) die tang(Θ — 45°) nehmen. Man wird überdieß bemerken, daß hier sowohl tang(45° — Θ) als auch $\text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ negativ ist, und daß folglich ihr Product $\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ positiv seyn muß.

Digitized by Google

$$\log \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0{,}9321428$$
$$\log \text{tang}\,(45° - \Theta) = \bar{2}{,}0871107$$
$$\log \text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \bar{1}{,}0192535$$
$$\frac{x-y}{2} = 5°, 58', 3'', 4$$
$$\frac{x+y}{2} = 96°, 40', 5'', 75$$
$$\text{Summe } x = 102°, 38', 9'', 15$$
$$\text{Differenz } y = 90°, 42', 2'', 35$$

Es versteht sich von selbst, daß hier nur der absolute Werth von tang $\left(\frac{x+y}{2}\right)$, ohne Rücksicht auf das Zeichen —, gemeint ist.

Man berechnet nun in den Dreiecken BAD, BCD, die Seiten AD, CD wie gewöhnlich.

221) Was einige ganz besondere, höchst seltene Fälle betrifft, welche die Auflösung geradliniger Dreiecke darbieten kann, verweisen wir auf (37) und die folgenden §§. Wir wollen dieses Kapitel beendigen, indem wir eine Formel zur Berechnung des Inhaltes eines Netzdreieckes geben, welche wir aus (67 bis) in Verbindung mit (66) herleiten. Es seien b, c, zwei Seiten, und A der eingeschlossene Winkel; der Inhalt sei J, und C der c gegenüberliegende Winkel, so ist:

$$J = \frac{b\,c\,\sin A}{2} - \frac{\left(\frac{b\,c\,\sin A}{2}\right)^2}{6\,R^2} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\left(\frac{b\,c\,\sin A}{2}\right)^2}{6\,R^2} \cdot \cot A.$$

Das Rechnungs-Formular ist also:

log b = ...	2 log 1. Th. = ...	log const. = ...
log c = ...	— log 6 = ...	log sin A = ...
log sin A = ...	— 2 log R = ...	— log sin C = ...
— log 2 = ...	log const. = ...	log 2. Th. = ...
log 1. Th. = ...	log cot A = ...	2. Th. = ...
1. Th. = ...	log 3. Th. = ...	
	3. Th. = ...	

Digitized by Google

Zweites Kapitel.

Berechnung der geographischen Längen und Breiten der Puncte eines trigonometrischen Netzes, und der Azimuthe der darin vorkommenden geodätischen Linien.

222) Um den Zweck, welchen wir im gegenwärtigen Kapitel erreichen wollen, zu erfüllen, muß man unterstellen, daß die Breite irgend eines Punctes und der Azimuth einer Dreieck-Seite, welche durch diesen Punct geht, gegeben seien. Weiß man dann die Aufgabe in (95, 1) aufzulösen, so kann man nach und nach die Breiten, Längenunterschiede und Azimuthe für das ganze trigonometrische Netz finden. Ehe wir jedoch die hierzu nöthigen Formeln aufstellen, wollen wir noch folgende Bemerkungen vorausschicken.

a) Man unterscheide, ob man von einem Puncte zu einem östlichern oder zu einem westlichern übergeht: im ersten Falle nehme man nur östliche, im zweiten Falle nur westliche Azimuthe; und zwar nordöstliche und nordwestliche, oder südöstliche und südwestliche, je nachdem man in der nördlichen oder in der südlichen Hemisphäre arbeitet. Wenn man diesen Gang befolgt, so wird immer der gegebene Azimuth ein innerer, und der gesuchte Azimuth der äußere entgegengesetzte Winkel seyn, welcher durch die Verlängerung der geodätischen Linie gebildet wird. So ist z. B. Fig. XXI. V der gegebene und NBK der gesuchte Azimuth.

b) Wenn der Azimuth einer Seite bekannt ist, so lassen sich alle Azimuthe der anderen Seiten, welche durch den nämlichen Punct, wie die erste, gehen, sehr leicht mit Hülfe der Winkel der Dreiecke bestimmen. Hierzu muß man aber die wahren, von den Irrthümern der Beobachtungen befreiten, Winkel und nicht die mittleren nehmen. Wie übrigens diese Winkel zusammengesetzt werden müssen, um die nöthigen Azimuthe zu erhalten, ergiebt sich sogleich beim Anblicke einer Figur, welche die Triangulation in kleinem Maaßstabe darstellt.

c) Wir werden in unsern Formularen fortwährend folgende Bezeichnung brauchen.

Die gegebene Breite des ersten Punctes . . . . . λ

Die gesuchte Breite des zweiten Punctes . . . . . λ'

Digitized by Google

Der Längenunterschied beider Puncte . . . . . P
Der gegebene Azimuth V
Sein Nebenwinkel . . . . . W
Der gesuchte Azimuth. . . . . V′
Sein Nebenwinkel . . . . . W′
Die geodätische Linie zwischen beiden Puncten . . . . . S
Der Durchmesser des Equators . . . . . a
Die Achse von einem Pole zum andern. . . . . b
Der mittlere Radius der Erde . . . . . R
Die Größe $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ . . . . . e^2
Die Größe $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ . . . . . ε
Die Größe $\frac{1}{\log. nat. 10}$ . . . . . K
Die Normale im Puncte, dessen Breite λ ist . . . . . N

d) Die Formeln, welche wir geben werden, sind für solche geodätische Linien berechnet, wie sie in einem trigonometrischen Netze vorkommen können; wir haben auch unterstellt, daß dieses Netz nicht in der Nähe des einen oder des anderen Poles gelegen sei; für diesen Fall müßte man sich nach der im zweiten Kapitel des zweiten Theils vorgetragenen Theorie besondere Formeln construiren.

223) Wenn die geodätische Linie über 30000 Meter beträgt, so hat man die Rechnung, welche in folgendem Beispiele geführt ist, vorzunehmen. (Zur Erläuterung siehe (132).)

Gegeben.

$\log a = 6{,}8046154$
$\log b = 6{,}8032061$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}8136593$

$\lambda = 48°, 50', 13''$
$S = 89764$ Met.
$V = 154°, 8', 20''$

NB. Die Größen a und b sind hier in Metern ausgedrückt, weil die geodätische Linie selbst in Metern angegeben ist.

Digitized by Google

Allgemeine Rechnung.

$\log b = 6{,}8032061$
$-\log a = \bar{7},1953846$
$\log \operatorname{tang} \lambda = 0{,}0583417$
$\log \operatorname{tang} \psi = 0{,}0569324$
$\psi = 48°, 44'', 41'', 245$
$\log \sin \psi = \bar{1},8760907$
$\log \cos \psi = \bar{1},8191583$

$180° = 179°, 59', 60''$
$V = 154°, 8', 20''$
$W = 25°, 51', 40''$
$2W = 51°, 43', 20''$
$\log \sin W = \bar{1},6396768$
$\log \cos W = \bar{1},9541721$
$\log \sin 2W = \bar{1},8949789$

$\log S = 4{,}9531022$
$-\log b = \bar{7},1967939$
$\log \sigma = \bar{2},1498961$

Berechnung von λ'.

$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$
$\log \sigma = \bar{2},1498961$
$\log \cos W = \bar{1},9541721$
$\log 1\text{tes Glied} = 3{,}4184933$
$-\log 8 = \bar{1},09691$
$\log 3 = 0{,}47712$
$2 \log \varepsilon = \bar{5},62731$
$4 \log \sin \psi = \bar{1},50436$
$\log 2\text{tes Gl.} = \bar{2},12419$
$2\text{tes Gl.} = 0'', 0133.$
Dieses hat das entgegengesetzte Zeichen von cos W.

1tes Glied $= 2621'', 1584.$
Dieses hat immer das entgegens. Zeichen von cos W.

$\log \varepsilon = \bar{3},81365$
Log. 1tes Gl. $= 3{,}41849$
$-\log 2 = \bar{1},69897$
$2 \log \sin \psi = \bar{1},75218$
$\log 3\text{tes Gl.} = 0{,}68329$
$3\text{tes Gl.} = 4'', 8228$
Dieses hat mit cos W einerlei Zeichen.

$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$
$2 \log \sigma = \bar{4},2997922$
$-\log 2 = \bar{1},6989700$
$2 \log \sin W = \bar{1},2793536$
$\log \operatorname{tang} \psi = 0{,}0569324$
$\log 4\text{tes Gl.} = 0{,}6494733$
$\log \varepsilon = \bar{3},81365$
$2 \log \sin \psi = \bar{1},75218$
$\log 5\text{tes Gl.} = \bar{2},21530$

4tes Gl. $= 4'', 4614.$ Dieß ist immer negativ.

5tes Gl. $= o'', 0164.$ Dieses ist immer positiv.

$-\log 2 = \bar{1},69897$
$\log \varepsilon = \bar{3},81365$
$2 \log \sigma = \bar{4},29979$
$2 \log \cos W = \bar{1},90834$
$\log \sin \psi = \bar{1},87609$
$\log \cos \psi = \bar{1},81916$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log 6\text{tes Gl.} = \bar{2},73043$
$6\text{tes Gl.} = \bar{o}'', 0538$

$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$-\log 4 = \bar{1},39794$
$3 \log \sigma = \bar{6},44969$
$\log \sin 2W = \bar{1},89488$
$\log \sin W = \bar{1},63968$
$\log \text{Fact.} = \bar{2},69662$
immer negativ.

$\log \text{Fact.} = \bar{2},6966$
$-\log 3 = \bar{1},5229$
$\log 7\text{t. Gl.} = \bar{2},2195$
$7\text{t. Gl.} = o'', 0166$

$\ldots\ldots = \bar{2},6966$
$2 \log \operatorname{tang} \psi = o{,}1139$
$\log 8\text{t. Gl.} = \bar{2},8105$
$8\text{t. Gl.} = o'', 0646$

Diese Gl. haben mit sin W einerlei Zeichen.

Digitized by Google

Negative Glieder.	Positive Glieder.
— 2621″, 1584	+ 4″, 8228
— 0″, 0133	+ 0″, 0164
— 4″, 4614	+ 0″, 0166
— 0″, 0538	+ 0″, 0646
Summe — 2625″, 6869	+ 4″, 9204
4,9204	
Rest — 2620″, 7665	= 43′, 40″, 766

$\psi = 48°, 44', 41'', 245$
Rest $= 43', 40'', 7665$
$\psi' = 48°, 1', 0'', 479$

$\log \text{tang } \psi' = 0{,}0458186$
$\log a = 6{,}8046154$
$-\log b = \bar{7},1967939$
$\log \text{tang } \lambda' = 0{,}0472279$

$\lambda' = 48°, 6', 33'', 231.$

Berechnung von V′.

$\log \sin W = \bar{1},6396768$
$\log \cos \psi = \bar{1},8191583$
$-\log \cos \psi' = 0{,}1746306$
$\log \sin V' = \bar{1},6334657$

$V' = 154°, 31', 57'', 400.$

Wenn man V′ ohne vorläufige Berechnung von ψ′ finden will, so ist nachstehendes Formular zu befolgen.

$\log \sigma = \bar{2},1498961$
$\log \sin W = \bar{1},6396768$
$\log \text{tang } \psi = 0{,}0569324$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$
$\log$ 1tes Gl. $= \bar{3},1609304$
$-\log 2 = \bar{1},69897$
$\log \varepsilon = \bar{3},81365$
$2 \log \sin \psi = \bar{1},75218$
$\log$ 2tes Gl. $= 0{,}42573$
2tes Gl. $= 2'', 665$
ist immer +.

1tes Gl. $= 1448'', 540$ ist immer —
$\log$ 1tes Gl. $= 3{,}161$
$\log 3 = 0{,}477$
$-\log 8 = \bar{1},097$
$2 \log \varepsilon = \bar{5},627$
$4 \log \sin \psi = \bar{1},504$
$\log$ 3tes Gl. $= \bar{3},866$
3tes Gl. $= 0'', 007$
ist immer —

$2 \log \sigma = \bar{4},29979$
$\log \sin W = \bar{1},63968$
$\log \cos W = \bar{1},95417$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log$ Fact. $= 1{,}20807$
$-\log 2 = \bar{1},69897$
$\log$ 4tes Gl. $= 0{,}90704$
4tes Gl. $= 8'', 073$
hat mit cos W einerlei Zeichen
$\log$ Fact. $= 1{,}20807$
$2 \log \text{tang } \psi = 0{,}11386$
$\log$ 5tes Gl. $= 1{,}32193$
5tes Gl. $= 20'', 986$
hat mit cos W einerlei Zeich.

Digitized by Google

log Fact. = 1,208	3 log σ = $\bar{6}$,450	log F′ = $\bar{1}$,461	log 9tes Gl. = $\bar{1}$,574
log ε = $\bar{3}$,814	— log sin 1″ = 5,314	2 log sin W = $\bar{1}$,279	log 4 = 0,602
2 log tang ψ = 0,113	log tang ψ = 0,057	log 8tes Gl. = $\bar{2}$,740	— log 3 = $\bar{1}$,523
log 6tes Gl. = $\bar{1}$,135	log sin W = $\bar{1}$,640	8tes Gl. = 0″,055	2 log sin W = $\bar{1}$,279
6tes Gl. = 0″,137	log F′ = $\bar{1}$,461	immer positiv.	log 10tes Gl. = $\bar{2}$,978
hat das entgegengesetzte	log 5 = 0,699	log F′ = $\bar{1}$,461	10tes Gl. = 0″,095
Zeichen von cos W.	— log 6 = $\bar{1}$,222	2 log tang ψ = 0,113	immer positiv.
	log 7tes Gl. = $\bar{1}$,382	log 9tes Gl. = $\bar{1}$,574	
	7tes Gl. = 0″,241	9tes Gl. = 0″,375	
	ist immer negativ.	ist immer negativ.	

Negative Glieder.	Positive Glieder.
— 1448″,540	+ 2″,665
— 0″,007	+ 8″,073
— 0″,137	+ 20″,986
— 0″,241	+ 0″,055
— 0″,375	+ 0″,095
Summe — 1449″,300	+ 31″,874
+ 31″,874	W = 25°, 51′, 40″
Rest — 1417″,426	Rest = — 0°, 23′, 37″, 426
oder — 23′,37″,426	W′ = 25°, 28′, 2″, 574
	180° = 179°, 59′, 60″, 000
	V′ = 154°, 31′, 57″, 426
	Oben fanden wir V′ = 154°, 31′, 57″, 400
	Unterschied . . . . . 0″, 026

Berechnung von P.

— log sin 1″ = 5,3144251		2 log σ = $\bar{4}$,29979
log σ = $\bar{2}$,1498961		log sin W = $\bar{1}$,63968
log sin W = $\bar{1}$,6396768		log cos W = $\bar{1}$,95417
— log cos ψ = 0,1808417		log tang ψ = 0,05693
log 1tes Gl. = 3,2848397	1. Gl. = 1926″,813 immer positiv.	— log cos ψ = 0,18084
— log 2 = $\bar{1}$,69897		— log sin 1″ = 5,31443
log ε = $\bar{3}$,81365		log 4tes Gl. = $\bar{1}$,44584 — 4. Gl. = 27″,915 hat d. entgegengesetzte Zeichen v. cos W.
log 2tes Gl. = 0,79746	2. Gl. = 6″,273 immer negativ.	log ε = $\bar{3}$,814
log 3 = 0,477		log 5tes Gl. = $\bar{1}$,260 — 5. Gl. = 0″,182 hat mit cos W einerlei Zeichen.
log ε = $\bar{3}$,814		— log 2 = $\bar{1}$,699
— log 4 = $\bar{1}$,398		2 log cos ψ = $\bar{1}$,638
log 3tes Gl. = $\bar{2}$,486	3. Gl. = 0″,031 immer positiv.	log 6tes Gl. = $\bar{2}$,597 — 6. Gl. = 0″,040 hat d. entgegengesetzte Z. von cos W

Digitized by Google

$3 \log \sigma =$	$\bar{6},450$		
$- \log \sin 1'' =$	$5,314$		
$\log \sin W =$	$\bar{1},640$		
$- \log \cos \psi =$	$0,181$		
$\log$ Fact. $=$	$\bar{1},585$		
$- \log 3 =$	$\bar{1},523$		
$2 \log \cos W =$	$\bar{1},908$		
log 7tes Gl. $=$	$\bar{1},016$	7. Gl. $= 0''$, 104 immer positiv.	

log Fact. $=$	$\bar{1},585$		
$2 \log \tan g \psi =$	$0,113$		
log 8tes Gl. $=$	$\bar{1},698$	8. Gl. $= 0''$, 499 immer positiv.	
$\log 4 =$	$0,602$		
$- \log 3 =$	$\bar{1},523$		
$2 \log \sin W =$	$\bar{1},279$		
log 9tes Gl. $=$	$\bar{1},102$	9. Gl. $= 0''$, 126 immer negativ.	

	Positive Glieder.	Negative Glieder.
	$+ 1926'', 813$	$- 6'', 273$
	$+ 0'', 031$	$- 27'', 915$
	$+ 0'', 182$	$- 0'', 040$
	$+ 0'', 104$	$- 0'', 126$
	$+ 0'', 499$	$- 34'', 354$
Summe	$+ 1927'', 629$	
	$- 34, 354$	
Rest	$1893'', 275 = 31', 33'', 275 = P.$	

224) Wenn die geodätische Linie weniger als 30000 Meter beträgt, so kann unsere Aufgabe nach folgenden Formularen aufgelöst werden. (Erläuterung (112).)

Es sei $\lambda = 50°, 16', 32'', 5$
$S = 28517,5$ Meter
$V = 33°, 14', 16'', 2$

Bekannt sind ausserdem $\log a = 6,8046154$, $\log K = \bar{1},63777$, $\log e^2 = \bar{3},81084$.

Vorläufige Berechnung.

$- \log 2 =$	$\bar{1},69897$	$\log a =$	$6,8046154$	$\log S =$	$4,4551114$
$\log K =$	$\bar{1},63777$	corr. $=$	$0,0008310$	$- \log N =$	$\bar{7},1945536$
$\log e^2 =$	$\bar{3},81084$	$\log N =$	$\bar{6},8054464$	$- \log \sin 1'' =$	$5,3144251$
$2 \log \sin \lambda =$	$\bar{1},77200$	$\log \sin \lambda =$	$\bar{1},8859989$	log const. $=$	$2,9640901$
log corr. $=$	$\bar{4},91958$			$\log \cos \lambda =$	$\bar{1},8055648$
corr. $=$	$0,0008310$				

Digitized by Google

Berechnung von λ'.

log const. = 2,9640901	2 log const. = 5,92818	log const. = 2,96409
log cos V = $\bar{1}$,9224153	log sin 1″ = $\bar{6}$,68557	log e² = $\bar{3}$,81084
log 1tes Gl. = 2,8865054	2 log sin V = $\bar{1}$,47774	log cos V = $\bar{1}$,92242
	log tang λ = 0,08043	2 log cos λ = $\bar{1}$,61114
	— log 2 = $\bar{1}$,69897	log 3tes Gl. 0,30848
	log 2tes Gl. = $\bar{1}$,87089	

1tes Glied ist immer positiv und hier = + 770″,026
2tes Glied ist immer negativ und hier . . . . . = — 0″,743
3tes Glied hat das Zeichen von cos V, hier = + 2″,035

Summe = + 772″,061 = — 0″,743
davon . . . . . 0″,743

Rest = + 12′,51″,318
λ = 50°,16′,32″,5
λ′ = 50°,29′,23″,818.

Berechnung von V'.

log const. = 2,9640901	2 log const. = 5,92818	log Fact. = 0,27505
log sin V = $\bar{1}$,7388722	log sin 1″ = $\bar{6}$,68557	2 log tang λ = 0,16087
log tang λ = 0,0804341	log sin V = $\bar{1}$,73887	log 3tes Gl. = 0,43592
log 1tes Gl. = 2,7833964	log cos V = $\bar{1}$,92242	
	log Fact. = 0,27505	
	— log 2 = $\bar{1}$,69897	
	log 2tes Gl. = $\bar{1}$,97420	

1tes Gl. immer positiv, hier = + 607″,29
2tes Gl. hat d. Zeichen von cos V = + 0″,942
3tes Gl. . . idem . . . . . = + 2″,728

Summe = 610″,960 = 10′,10″,960
dazu V = 33°,14′,16″,2

V′ = 33°,24′,27″,160

Digitized by Google

Berechnung von P.

log const.	= 2,9640901	1tes Glied immer positiv	= 789″, 583
log sin V	= $\bar{1}$,7388722	2tes Gl. hat d. Zeichen von cos V	= 3″, 547
— log cos λ	= 0,1944352	Summe	= 793″, 130
log 1tes Gl.	= 2,8973975	Diese Summe ist auch P	= 13′, 13″, 130.
log tang λ	= 0,08043		
log cos V	= $\bar{1}$,92242		
log S	= 4,45511		
— log N	= $\bar{7}$,19455		
log 2tes Gl.	= 0,54991		

Anmerkung. Wenn die Linie S viel kleiner wäre als im vorhergehenden Beispiele, so könnte es der Fall seyn, daß man nur die größern Glieder in den vorigen Formularen zu beachten brauchte; man würde dieses leicht an dem Werthe des log const. sehen.

225) Obgleich hier nur von so kleinen geodätischen Linien gesprochen werden sollte, wie sie als Seiten der Dreiecke eines trigonometrischen Netzes vorkommen können, so wollen wir doch auch zeigen, wie die Aufgabe, welche wir in dem gegenwärtigen Kapitel behandelt haben, aufgelöst wird, wenn die geodätische Linie jede mögliche Größe hat. (Erläuterung (137, 1).)

Gegeben sind

S = 2450932 Meter. λ = 50°, 16′, 30″. W = 15°, 8′, 20″.

Gesucht, λ′, W′, P; wozu folgende

Berechnung.

log b	= 6,8032061	log sin W	= $\bar{1}$,4169062	log sin ψ	= $\bar{1}$,8854178
— log a	= $\bar{7}$,1953846	log cos ψ	= $\bar{1}$,8064037	— log sin l′	= 0,0061591
log tang λ	= 0,0804234	log cos l′	= $\bar{1}$,2233099	log cos μ	= $\bar{1}$,8915769
log tang ψ	= 0,0790141	l′	= 80°,22′,23″,86	μ	= 38°,49′,27″,93
ψ	= 50°,11′,0″,91				= 139767″,93

Digitized by Google

$\log \text{tang } \mu = \bar{1},9056463$
$-\log \cos 1' = 0,7766901$
$\log \text{tang } y = 0,6823364$
$y = 78°,15',37'',89$

$\log b = 6,80321$
$\log \sin 4\mu = \bar{1},62108$
$-\log 256 = \bar{3},59176$
$2 \log \varepsilon = \bar{5},62732$
$4 \log \sin 1' = \bar{1},97536$
$\log 6\text{tes Gl.} = \bar{1},61873$

$\log b = 6,8032061$
$\log \mu = 5,1454076$
$\log \sin 1'' = \bar{6},6855649$
$\log 1\text{tes Gl.} = 6,6341886$
$-\log 4 = \bar{1},3979400$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$2 \log \sin 1' = \bar{1},9876818$
$\log 2\text{tes Gl.} = 3,8334697$
$\log 3 = 0,4771212$
$-\log 16 = \bar{2},7958800$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$2 \log \sin 1' = \bar{1},9876818$
$\log 3\text{tes Gl.} = 0,9078120$

$\log b = 6,8032061$
$\log \sin 2\mu = \bar{1},9898301$
$-\log 8 = \bar{1},0969100$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$2 \log \sin 1' = \bar{1},9876818$
$\log 4\text{tes Gl.} = 3,6912873$
$-\log 4 = \bar{1},3979400$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$2 \log \sin 1' = \bar{1},9876818$
$\log 5\text{tes Gl.} = 0,8905684$

1tes Glied ist immer positiv und hier $= +$ 4307135,9 Meter.
2tes Gl. . . . . $= +$ 6815,06
3tes Gl. ist immer negativ . . . . . $= -$ 8,08
4tes Gl. hat das Zeichen von $\sin 2\mu = +$ 4912,33
5tes Gl. hat das entgegengesetzte Zeichen von $\sin 2\mu$. $= -$ 7,77
6tes Gl. hat das entgegengesetzte Zeichen von $\sin 4\mu$. $= -$ 0,41
Summe $= +$ 4318863,29 $= -$ 16,26
Davon 16,26
Bleibt M = 4318847,03
Hierzu S = 2450932,00
M + S = 6769779,03

$\log \mu = 5,1454076$
$\log \cos 1' = \bar{1},2233099$
$-\log 2 = \bar{1},6989700$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$\log 1\text{tes Gl.} = \bar{1},8813458$
$-\log 4 = \bar{1},3979$
$\log 3 = 0,4771$
$\log \varepsilon = \bar{3},8137$
$\log 2\text{tes Gl.} = \bar{1},5700$

$-\log 16 = \bar{2},7959$
$2 \log \varepsilon = \bar{5},6273$
$2 \log \sin 1' = \bar{1},9877$
$\log \cos 1' = \bar{1},2233$
$\log \text{Fact.} = \bar{7},6342$
$\log \mu = 5,1454$
$\log 3\text{tes Gl.} = \bar{2},7796$

$-\log \sin 1'' = 5,3144$
$\log \text{Fact.} = \bar{7},6342$
$-\log 2 = \bar{1},6990$
$\log \sin 2\mu = \bar{1},9898$
$\log 4\text{tes Gl.} = \bar{2},6374$

Digitized by Google

1tes Glied ist immer negativ . . . . = — 76″, 09
2tes Glied ist immer positiv . . . . . = + 0″,37
3tes Glied . . . idem . . . . . = + 0″, 06
4tes Glied hat mit sin 2 μ einerlei Zeichen . . . . . = + 0″, 04

Summe = — 76″, 09 = + 0″, 47
Davon . . . . . 0″, 47

Bleibt = — 75″, 62 = — 1′, 15″, 62
Hierzu . . . . . y = 78°, 15′, 37″, 89

φ = 78°, 14′, 22″, 27

log (M + S) = 6,8305746
— log b = $\bar{7}$,1967939
log σ = 0,0273685
σ = 1,0650463

log σ = 0,0273685
— log sin 1″ = 5,3144251
log σ'' = 5,3417936
σ'' = 219681″, 56
= 61°, 1′, 21″, 56
2 σ'' = 122°, 2′, 43″, 12
4 σ'' = 244°, 5′, 26″, 24.

log σ = 0,0273685
— log 4 = $\bar{1}$,3979400
log ε = $\bar{3}$,8136593
2 log sin 1′ = $\bar{1}$,9876818
log 1tes Gl. = $\bar{3}$,2266496
log ε = $\bar{3}$,8137
2 log sin 1′ = $\bar{1}$,9877
log 7 = 0,8451
— log 16 = $\bar{2}$,7959
log 2tes Gl. = $\bar{6}$,6690

log sin 2 σ = $\bar{1}$,92821
— log 8 = $\bar{1}$,09691
log ε = $\bar{3}$,81365
2 log sin 1′ = $\bar{1}$,98768
log 3tes Gl. = $\bar{4}$,82645
log ε = $\bar{3}$,814
— log 2 = 1,699
2 log sin 1′ = $\bar{1}$,988
log 4tes Gl. = $\bar{6}$,327

log sin 4 σ = $\bar{1}$,954
log 5 = 0,699
— log 256 = $\bar{3}$,592
2 log ε = $\bar{5}$,627
4 log sin 1′ = $\bar{1}$,975
log 5tes Gl. = $\bar{7}$,847
log σ = 0,027
log cos 2 σ = $\bar{1}$,725
— log 16 = $\bar{2}$,796
2 log ε = $\bar{5}$,627
4 log sin 1′ = $\bar{1}$,975
log 6tes Gl. = $\bar{6}$,150

Digitized by Google

1tes Glied ist immer negativ . . . . . = — 0,0016852

2tes Glied ist immer positiv . . . . . = + 0,0000047

3tes Gl. hat d. entgegengef. Zeichen von sin 2σ = — 0,0006705

4tes Glied hat das Zeichen von sin 2σ . . . . . = + 0,0000021

5tes Glied hat das Zeichen von sin 4σ . . . . . = — 0,0000007

6tes Glied hat das Zeichen von cos 2σ . . . . . = — 0,0000014

Summe = — 0,0023578 = + 0,0000068

Davon 0,0000068

Bleibt = — 0,0023510

Hierzu σ = + 1,0650463

$(\mu+\xi)$ = 1,0626953

$\log(\mu+\xi) = 0,0264088$
$-\log \sin 1'' = 5,3144251$
$\log(\mu+\xi)'' = 5,3408339$
$\log \operatorname{tang}(\mu+\xi)'' = 0,2542477$
$-\log \cos l' = 0,7766901$
$\log \operatorname{tang} y' = 1,0309378$

$(\mu+\xi)'' = 219196'',66 = 60°, 53', 16'', 66$
davon $\mu'' = 138767, 93 = 38°, 49', 27'', 93$
$\xi'' = 79428,73 = 22°, 3', 48'', 73$
$2(\mu+\xi)'' = 121°, 46', 33'', 23$

. . . . . $y' = 84°, 40', 47'', 01$

$\log(\mu+\xi)' = 5,3408339$
$\log \cos l' = \bar{1},2233099$
$-\log 2 = \bar{1},6989700$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
log 1tes Glied = $\bar{2},0767731$
$-\log 4 = \bar{1},398$
$\log 3 = 0,477$
$\log \varepsilon = \bar{3},814$
log 2tes Glied = $\bar{1},766$

$-\log 16 = \bar{2},796$
$2\log \varepsilon = \bar{5},627$
$2\log \sin l' = \bar{1},988$
$\log \cos l' = \bar{1},223$
$\log \text{Fact.} = \bar{7},634$
$\log(\mu+\xi)'' = 5,341$
log 3tes Gl. = $\bar{2},975$

$-\log \sin 1'' = 5,314$
$\log \text{Fact.} = \bar{7},634$
$-\log 2 = \bar{1},699$
$\log \sin 2(\mu+\xi'') = \bar{1},929$
log 4tes Gl. = $\bar{2},576$

1tes Glied ist immer negativ . . . . . = — 119'', 34

2tes Glied ist immer positiv . . . . . = + 0'', 58

3tes Glied . . idem . . . . . = + 0'', 09

4tes Glied hat das Zeichen von sin 2 $(\mu+\xi)''$ . . . . . = + 0'', 04

Summe = — 119'', 34 = + 0'', 71

Davon . . . . . 0'', 71

Bleibt = — 118'', 63 = — 1', 58'', 63

Digitized by Google

Bleibt	$= -118'', 63$	$=$	$-\ 1', 58'', 63$
Hierzu	$y' =$		$84°, 40', 47'', 01$
$y' =$	$84°, 40', 47'', 01$	$\varphi' =$	$84°, 38', 48'', 38$
davon $y =$	$78°, 15', 37'', 89$	davon $\varphi =$	$78°, 14', 22'', 27$
$y' - y =$	$6°, 25', 9'', 12$	$P =$	$6°, 24', 26'', 11$

$\log \cos \psi = \bar{1},8064037$	$\log \sin(\mu+\xi)'' = \bar{1},9413474$	$\log \tan g\, \psi' = \bar{1},7377184$
$\log \sin(y'-y) = \bar{1},0484493$	$-\log \sin y' = 0,0018750$	$\log a = 6,8046154$
$-\log \sin \xi'' = 0,4252345$	$\log \cos \psi' = \bar{1},9432224$	$-\log b = \bar{7},1967939$
$\log \sin W' = \bar{1},2800875$	$\psi' = 28°, 39', 49'', 40$	$\log \tan g\, \lambda' = \bar{1},7391233$
$W' = 10°, 59', 12'', 82$		$\lambda' = 28°, 44', 30'', 48$

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Berechnung der Entfernung zweier Puncte aus ihrer geographischen Lage.

226) Die Aufgabe, mit welcher wir uns nun beschäftigen wollen, ist die des vorigen Kapitels umgekehrt. Nämlich: wenn die geographischen Breiten und der Längenunterschied zweier Puncte gegeben sind, soll die zwischen den Puncten liegende geodätische Linie, und ihre Azimuthe berechnet werden.

Wir wollen diese Aufgabe zuerst ganz allgemein, das heißt, für jede mögliche Entfernung der gegebenen Puncte, auflösen, und nachher die besondern Fälle einzeln betrachten, in welchen die gesuchte geodätische Linie gewisse Grenzen nicht übersteigt.

Zum Beispiele. (Erläuterung (137, 2.))

Gegeben sind:

$\lambda = 50°, 16', 30''.$ $\lambda' = 28°, 44', 30'', 48.$ $P = 6°, 24', 26'', 11.$

Berechnung.

$\log \text{tang}\, \lambda = 0{,}0804234$
$\log b = 6{,}8032061$
$-\log a = \bar{7}{,}2953846$
$\log \text{tang}\, \psi = 0{,}0790191$
$\psi = 50°, 11', 0'', 41$
$\psi' = 28°, 39', 49'', 40$
$\psi - \psi' = 21°, 31', 11'', 51$
$\psi + \psi' = 78°, 50', 50'', 31$
$\log \sin \psi = \bar{1}{,}88542$
$\log \sin \psi' = \bar{1}{,}68094$
$\log 1.\ \text{Gl.} = \bar{1}{,}56636$

$\log \text{tang}\, \lambda' = \bar{1}{,}73991233$
$\log b = 6{,}8032061$
$-\log a = \bar{7}{,}1953846$
$\log \text{tang}\, \psi' = \bar{1}{,}73377184$
$\frac{1}{2}(\psi - \psi') = 10°, 45', 35'', 755$
$\frac{1}{2}(\psi + \psi') = 39°, 25', 25'', 155$
$\log \cos \psi = \bar{1}{,}80640$
$\log \cos \psi' = \bar{1}{,}94322$
$\log \cos P = \bar{1}{,}99728$
$\log 2\text{tes Gl.} = \bar{1}{,}74690$

$1\text{tes Gl.} = 0{,}36843$
$2\text{tes Gl.} = 0{,}55835$
$\cos \xi' = 0{,}92678$
$\log \cos \xi' = \bar{1}{,}96698$
$\xi' = 22°, 3', 40''$
$= 79420''$

Digitized by Google

$\log \sin P = \bar{1},04764$
$-\log 2 = \bar{1},69897$
$\log \varepsilon = \bar{3},81365$
$\log \xi' = 4,89994$
$\log \cos \psi = \bar{1},80640$
$\log \cos \psi' = \bar{1},94322$
$-\log \sin \xi' = 0,42527$
$\log \text{Glied} = \underline{1,63519}$

$P = 6°, 24', 26'', 11$
dazu Gl. $= \underline{\quad 43'', 17}$
$(y'-y)_, = 6°, 25', 9'', 28$
$\frac{1}{2}(y'-y)_, = 3°, 12', 34'', 64$

$\log \cos \frac{1}{2}(\psi-\psi') = \bar{1},9922963$
$-\log \sin \frac{1}{2}(\psi+\psi') = 0,1971924$
$\log \cot \frac{1}{2}(y'-y)_, = 1,2512141$
$\log \cot \frac{1}{2}(W_,-W'_,) = \underline{1,4407028}$

NB. Wenn $\psi < \psi'$ ist, so schreibe man $(\psi'-\psi)$ statt $(\psi-\psi')$. Man muß dann d. Werth von $\frac{1}{2}(W'+W'_,)$, welchen man in den Tafeln findet, von 180° abziehen, um d. wahre $\frac{1}{2}(W'+W'_,)$ zu erhalten.

$\log \sin \frac{1}{2}(\psi-\psi') = \bar{1},2711312$
$-\log \cos \frac{1}{2}(\psi+\psi') = 0,1121169$
$\log \cot \frac{1}{2}(y'-y)_, = 1,2512141$
$\log \cot \frac{1}{2}(W_,+W'_,) = \underline{0,6344622}$
$\frac{1}{2}(W'+W'_,) = 2^0, 4', 33'', 64$
$\frac{1}{2}(W_,-W'_,) = \underline{13^0, 3', 46'', 79}$
durch Addition $W_, = 15^0, 8', 20'', 43$
durch Subtr. $W'_, = 10^0, 59', 13'', 15$

$\log \sin W_, = \bar{1},4169095$
$\log \cos \psi = \bar{1},8064037$
$\log \cos l'_, = \underline{\bar{1},2233132}$
$l'_, = 8^0, 22', 23'', 59$

$\log \sin \psi = \bar{1},8854178$
$-\log \sin l'_, = 0,0061592$
$\log \cos \mu_, = \underline{\bar{1},8915770}$
$\mu_, = 38^0, 49', 27'', 87$

$\log \sin \psi' = \bar{1},6809408$
$\log \sin l'_, = \underline{0,0061592}$
$\log \cos(\mu+\xi)_, = \bar{1},6871000$
$(\mu+\xi)_, = 60°, 53', 16'', 60$
$\mu_, = \underline{38°, 49', 27'', 87}$
Durch Subtraction $\xi_, = 22°, 3', 48'', 73$
$= 79428'', 73$
Durch Addition $(2\mu_, + \xi_,) = 99°, 42', 44'', 47$
Dieses zweimal $(4\mu_, + 2\xi_,) = 199°, 25, 28'', 94$

$\log \cos l'_, = \bar{1},2233132$
$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$
$-\log 2 = \bar{1},6989700$
$\log$ 1tes Gl. $= \bar{4},7359425$

$-\log 4 = \bar{1},3979$
$\log \varepsilon = \bar{3},8137$
$\log 3 = 0,4771$
$\log$ 2tes Gl. $= \bar{6},4246$
$-\log 3 = \bar{1},5229$
$-\log 2 = \bar{1},6990$
$2 \log \sin l'_, = \bar{1},9877$
$\log$ 3tes Gl. $= \bar{7},6342$
$\log \sin \xi_, = \bar{1},575$
$\log \cos(2\mu_, + \xi_,) = \bar{1},269$
$\log$ 4tes Gl. $= \bar{8},478$
$-\log \sin 1'' = 5,314$
$\log$ 2ter Th. $= \bar{3},792$

1tes Gl. immer positiv $= +0,000544301$
2tes Gl. immer negativ $= \ldots\ldots\ldots - 0,0000026583$
3tes Gl. $\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots - 0,0000004307$
Summe $= +0,000544301 = -0,0000030890$
Davon $\ldots\ldots 0,0000030890$
Rest $= 0,0005413411$

$\log$ Rest $= \bar{4},7334709$
$\log \xi_, = 4,8999776$
$\log$ 1ter Theil $= 1,6334485$

NB. Die Ordnung, in welcher die hier angedeuteten Rechnungen auf einander folgen, wird man, wenn sie allenfalls nicht ganz deutlich seyn sollte, leicht dadurch erkennen, daß immer in der vorhergehenden Rechnung Größen bestimmt werden, die man in der folgenden als bekannt betrachtet.

Digitized by Google

1ter Th. . . . . $= +42'',998$

2ter Th. hat d. entgegengef. Z. v. $\cos(2\mu_{,}+\xi_{,}) = +\ 0'',006$

Zuſammen $= +43'',004$

Hierzu $P = 6°, 24', 26'', 11$

$y' - y = 6°, 25', 9'', 114$

$\frac{y'-y}{2} = 3°, 12', 24'', 557$

$\log\cos\psi = \bar{1},8064037$

$\log\cos\psi' = \bar{1},9432224$

$2\log\sin\left(\frac{y'-y}{2}\right) = \bar{3},4962020$

log d. 3ten Th. $= \bar{3},2458281$

1ter Th. $= 0,00176128$

$m = 0,03485480$

$\sin^2\frac{\xi}{2} = 0,03661608$

Zu dem dritten Theile wird addirt die Zahl, welche dem $2\log\sin\left(\frac{\psi-\psi'}{2}\right)$ (oder wenn $\psi < \psi'$ iſt, $2\log\sin\left(\frac{\psi'-\psi}{2}\right)$) zugehört; ſie heißt hier m. Alſo $2\log\sin\left(\frac{\psi-\psi'}{2}\right) = \bar{2},5422624$, dieß iſt log. m.

Von $\sin^2\frac{\xi}{2}$ der log. giebt: $2\log\sin\frac{\xi}{2} = \bar{2},5636718$, davon die Hälfte giebt:

$\log\sin\frac{\xi}{2} = \bar{1},2818359$

$\frac{\xi}{2} = 11°, 1', 54'', 37$

Dieſes verdoppelt wird: $\xi = 22°, 3', 48'', 74 = 79428'', 74$.

$\log b = 6,8032061$	$\log b = 6,80321$	$\log b = 6,803$
$\log\xi = 4,8999776$	$\log\sin\xi = \bar{1},57476$	$\log\sin 2\xi = \bar{1},843$
$\log\sin 1'' = \bar{6},6855749$	$\log\cos(2\mu_{,}+\xi_{,}) = \bar{1},22711$	$\log\cos(4\mu_{,}+2\xi_{,}) = \bar{1},975$
log 1tes Gl. $= \bar{6},3887586$	$-\log 4 = \bar{1},39794$	$-\log 128 = \bar{3},893$
$-\log 4 = \bar{1},39794$	$\log\varepsilon = \bar{3},81366$	$2\log\varepsilon = \bar{5},627$
$\log\varepsilon = \bar{3},81366$	$2\log\sin 1'_{,} = \bar{1},98768$	$4\log\sin 1'_{,} = \bar{1},976$
$2\log\sin 1'_{,} = \bar{1},98768$	log 4tes Gl. $= \bar{2},80436$	log 6tes Gl. $= 0,117$
log 2tes Gl. $= \bar{3},58804$	$-\log 4 = \bar{1},398$	
$\log 3 = 0,477$	$\log\varepsilon = \bar{3},814$	
$-\log 16 = \bar{2},796$	$2\log\sin 1'_{,} = \bar{1},988$	
$\log\varepsilon = \bar{3},814$	log 5tes Gl. $= 0,004$	
$2\log\sin 1'_{,} = \bar{1},988$		
log 3tes Gl. $= 0,663$		

Digitized by Google

1tes Gl. ist immer positiv und hier . . . . . = + 2447702,2 Met.
2tes Gl. . . . . = + 3872,9
3tes Gl. ist immer negativ . . . . . = — 4,6
4tes Glied hat das Zeichen von $\cos(2\mu_{,}+\xi_{,})$ . . . . . = — 637,3
5tes Gl. hat d. entgegengesz. Zeichen von $\cos(2\mu_{,}+\xi_{,})$ = + 1,0
6tes Gl. hat d. entgegengesz. Z. v. $\cos(4\mu_{,}+2\xi_{,}).\sin 2\xi_{,}$ = + 1,3

Summe = + 2451577,4 = — 641,9
Davon 641,9

Bleibt S = 2450935,5 die gesuchte Entfern.

Will man nun auch die Azimuthe W und W′ haben, so mache man die nämliche Rechnung, wodurch man oben $W_{,}$ und $W'_{,}$ fand, nur mit dem Unterschiede, daß man $(y'-y)$ und nicht $(y'-y)_{,}$ schreibt.

Wenn man sich mit einem minder genauen Werthe von S hätte begnügen wollen, so hätte man von dem Orte an, wo das Zeichen ** steht, folgendermaaßen fortgefahren.

$\log \xi_{,} = 4{,}8999776$	$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$
$\log b = 6{,}8032061$	$\log b = 6{,}80321$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$	$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$\log$ 1tes Gl. $= 6{,}3887586$	$2 \log \sin 1'_{,} = \bar{1}{,}98768$
$-\log 4 = \bar{1}{,}3979400$	$\log \sin \xi_{,} = 1{,}57476$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}8136593$	$\log \cos(2\mu_{,}+\xi_{,}) = \bar{1}{,}22711$
$2 \log \sin 1'_{,} = \bar{1}{,}9876816$	$\log$ 3tes Gl. $= 2{,}80436$
$\log$ 2tes Gl. $= 3{,}5880395$	

1tes Gl. immer positiv . . . . . = + 2447702,2 Meter.
2tes Gl. immer positiv . . . . . = + 3872,9
3tes Gl. hat das Zeichen von $\cos(2\mu_{,}+\xi_{,})$ . . . . . = — 637,3

Summe = + 2451575,1 = — 637,3
Davon 637,3

Bleibt die minder genaue Entfernung $S_{,}$ = 2450937,8

Anmerkung. Das Beispiel, welches wir eben behandelt haben, ist das nämliche wie in (225), nur umgekehrt, so daß das eine dem andern zur Verification dient. Das

Digitized by Google

gegebene S war dort = 2450932, und hier fanden wir

. . . . . S = 2450935,5.

Der Unterschied . . . . . 3,5 ist so klein, daß eine schärfere Genauigkeit bei dem Gebrauche der Logarithmen mit 7 Decimalstellen gar nicht erwartet werden kann.

227) Wenn die gesuchte geodätische Linie zwischen 30000 und 300000 Met. enthalten ist, so wird unsere Aufgabe nach folgendem Formulare gelöst.

Zum Beispiel. (Erläuterung (135, 136).)

$\lambda = 48°, 50', 13''$; $\lambda' = 48°, 6', 33'', 231$; $P = 1893'', 275$.

Berechnung.

$\log b = 6{,}8032061$	$\log b = 6{,}8032061$
$-\log a = \bar{7}{,}1953846$	$-\log a = \bar{7}{,}1953846$
$\log \tan\lambda = 0{,}0583417$	$\log \tan\lambda' = 0{,}0472279$
$\log \tan\psi = 0{,}0569324$	$\log \tan\psi' = 0{,}0458186$
$\psi = 48°, 44', 41'', 245$	$\psi' = 48°, 1', 0'', 479$

$\psi' = 48°, 1', 0'', 479$

$\psi - \psi' = 43', 40'', 7665 = 2620'', 7665$

NB. Wenn $\psi' > \psi$ wäre, so nähme man $\psi' - \psi$ statt $\psi - \psi'$, welches in diesem Falle negativ wäre.

$\log(\psi - \psi') = 3{,}41843$	$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$	$\log P = 3{,}2772136$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	$\log \cos\psi = \bar{1}{,}8191583$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$	$2\log P = 6{,}55442$	$\log \gamma = 3{,}0963719$
$2\log \sin\psi = \bar{1}{,}75218$	$\log \sin\psi = \bar{1}{,}87609$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$\log \alpha = 0{,}68324$	$\log \cos\psi = \bar{1}{,}81916$	$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
	$\log \beta = 0{,}63421$	$\log \delta = 0{,}60900$

$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$	α hat d. Zeichen von $\psi - \psi'$ und ist hier = + 4'', 822
$\log P = 3{,}27721$	β ist immer negativ . . . . . = − 4'', 307
$\log(\psi - \psi') = 3{,}41843$	Rest = + 0'', 515
$\log \sin\psi = \bar{1}{,}87609$	Dazu $(\psi - \psi')$ = + 2620, 7665
$\log \eta = 1{,}25730$	m_1 = 2621'', 281

Digitized by Google

γ ist immer positiv und hier $= +1248'',452$

δ immer positiv . . . . . $= +4'',064$

ε hat das Zeichen von $\psi - \psi' = +18'',084$

Summe $n_{,} = 1270'',600$

$\log n_{,} = 3,1040089$

$-\log m_{,}$ *) $= \bar{4},5814862$

$\log \operatorname{tang} W_{,} = \bar{1},6854951$

$W_{,} = 25°, 51', 38'',22$

$\log n_{,} = 3,1040089$

$\log \sin 1'' = \bar{6},6855749$

$-\log \sin W_{,} = 0,3603309$

$\log b = 6,8032061$

$\log S_{,} = 4,9531208$

$S_{,} = 89767,84$ Meter.

Dieß ist schon ein angenäherter Werth von der gesuchten S; will man diese aber genauer haben, so fahre man fort.

$\log m_{,} = \bar{3},4185138$

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$

$2 \log \sin \psi = \bar{1},7521814$

$\log A = 0,8833245$

$-\log 4 = \bar{1},39794$

$\log 3 = 0,47712$

$\log \varepsilon = \bar{3},81366$

$2 \log \sin \psi = \bar{1},75218$

$\log B = \bar{2},12422$

$2 \log n_{,} = 6,2080178$

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log \sin 1'' = \bar{6},6855749$

$\log \operatorname{tang} \psi = 0,0569324$

$\log C = 0,6494951$

$\log \varepsilon = \bar{3},81366$

$2 \log \sin \psi = \bar{1},75218$

$\log D = \bar{2},21534$

$\log \sin 1'' = \bar{6},68557$

$2 \log m_{,} = 6,83703$

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$\log \varepsilon = \bar{3},81366$

$\log \sin \psi = \bar{1},87609$

$\log \cos \psi = \bar{1},81916$

$\log F = \bar{2},73048$

$2 \log \sin 1'' = 11,37115$

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$2 \log n_{,} = 6,20802$

$\log m_{,} = 3,41851$

$-\log 3 = \bar{1},52288$

$\log G = \bar{2},21953$

$2 \log \operatorname{tang} \psi = 0,11386$

$\log 3 = 0,47712$

$\log H = \bar{2},81051$

A hat das Zeichen v. $m_{,}$ hier $= +4'',82308$

B das entgegengesetzte . . . . . $= -0'',01335$

C immer negativ . . . . . $= -4'',46165$

D immer positiv . . . . . $= +0'',01642$

F immer negativ . . . . . $= -0'',05376$

G, H haben d. Zeichen von $m_{,} =$ $+0'',01658$ $+0'',06464$

Summe $= +4'',92072 = -4'',52872$

Davon . . . . $4,52872$

Rest $= 0'',39200$

dazu $\psi - \psi' = 2620,7665$

$m = 2621'',1585$

*) Wenn $m_{,}$ negativ wäre, so nähme man, wie immer, den log. des absoluten Werthes von $m_{,}$; allein dann ist zu bemerken, daß der wahre Winkel $W_{,}$, der Nebenwinkel desjenigen ist, welchen man aus den Tafeln erhält.

Digitized by Google

$\log n_{,} = 3{,}1040089$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}8136593$
$\log A' = 0{,}6166382$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$
$\log 3 = 0{,}47712$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$\log B' = \bar{2}{,}30536$

$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$
$\log m_{,} = 3{,}4185138$
$\log n_{,} = 3{,}1040089$
$\log \operatorname{tang} \psi = 0{,}0569324$
$\log C' = 1{,}2650300$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$\log D' = \bar{1}{,}07869$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$2 \log \cos \psi = \bar{1}{,}63832$
$\log F' = \bar{2}{,}41498$

$2 \log \sin 1'' = \bar{11}{,}37115$
$2 \log m_{,} = 6{,}83703$
$\log n_{,} = 5{,}10401$
$-\log 3 = \bar{1}{,}52288$
$\log G' = \bar{2}{,}83507$
$-2 \log \cos W_{,} = 0{,}09166$
$\log 3 = 0{,}47712$
$2 \log \operatorname{tang} \psi = 0{,}11386$
$\log H' = \bar{1}{,}51771$

$\log P = 3{,}2772136$
$\log \cos \psi = \bar{1}{,}8191583$
$\log \gamma = 3{,}0963719$
$2 \log \sin 1'' = \bar{11}{,}37115$
$3 \log n_{,} = 9{,}31203$
$\log 4 = 0{,}60206$
$2 \log \operatorname{tang} \psi = 0{,}11386$
$-\log 3 = \bar{1}{,}52288$
$\log J' = \bar{2}{,}92198$

γ ist immer positiv, hier $= +1248'',45172$
A' . . . . . id. . . . . $= +4{,}13655$
B' ist immer negativ . . . . . $= -0'',02020$
C' hat das Zeichen v. $m_{,}$ $= +18'',40899$
D' hat das entgegengeſ. Z. . . . . $= -0{,}11987$
F' wie C' . . . . . $= +0{,}02606$
G' iſt immer negativ . . . . . $= -0{,}06840$
H' . . . . . id. . . . . $= -0{,}32939$
J' iſt immer positiv . . . $= +0{,}08356$
Summe $= +1271'',10688 = -0'',53786$
Davon $= 0{,}53786$
Bleibt $n = 1270'',56902.$

$\log n = 3{,}1039983$
$-\log m = \bar{4}{,}5815067$
$\log \operatorname{tang} W = \bar{1}{,}6855050$
$W = 25°,51',40'',055$

$\log n = 3{,}1039983$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$
$-\log \sin W = 0{,}3603230$
$\log b = 6{,}8039062$
$\log S = 4{,}9531023$
$S = 89764{,}02$ Met.

Das gegenwärtige Beiſpiel iſt das aus (223) umgekehrt.

Wenn die geſuchte geodätiſche Linie weniger als 30000 Meter beträgt, ſo kann man ſchon die Werthe $S_{,}$ und $W_{,}$ für S und W nehmen.

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Auflösung mehrerer Aufgaben, welche bei der Construction perspectivischer Projectionen vorkommen.

228) Eine Hemisphäre auf den Horizont zu projiciren.

(Erläuterung (141) und folgende.)

Man ziehe zuerst den Kreis Fig. LXII, welcher die ganze Charte einschließt, und in demselben einen nach beiden Seiten verlängerten Durchmesser, dessen Endpuncte mit 0° und 180° bezeichnet werden, weil er den ersten Meridian vorstellt *).

Dieser Kreis bedeutet den Horizont desjenigen Punctes, welcher genau in der Mitte der Charte liegt; die geographische Breite dieses Punctes sei = 30° nördlich und heiße λ.

Alle Linien, welche wir berechnen werden, trage man nach einem verjüngten Maaßstabe (Fig. XLII, b) auf, wovon 1000 Theile dem Radius des die Charte umgebenden Kreises gleich sind.

Dieß vorausgesetzt, verfahre man wie folgt: man nehme

$\log 1000 = 3{,}0000000$
$\log \text{tang}\,\lambda = \bar{1}{,}7614394$
$\log CA = 2{,}7614394$

$CA = 577{,}35$; diesen Werth trage man von C nach A, errichte in A das Perpendikel FF, und bezeichne den Punct A mit 30°, weil FF den Parallelkreis von 30° südlicher Breite vorstellt. Man rechne ferner

$\log 1000 = 3{,}0000000$
$-\log \cos\lambda = 0{,}0624694$
$\log AB = 3{,}0624694$

$AB = 1154{,}7$ und trage diesen Werth von A nach B auf, so ist B der Nordpol.

Meridiane werden nun folgendermaaßen construirt.

Zum Beispiele: die Meridiane zu zeichnen, deren östliche oder westliche Länge 50° beträgt. Man rechne:

---

*) Man kann zwar jeden beliebigen Meridian als den ersten annehmen; allein in den Formularen des gegenwärtigen Paragraphen sind alle Längen von dem Durchmesser 0,180 her gezählt worden.

Digitized by Google

$\log AB = 3{,}0624694$
$\log \cot 50° = \bar{1}{,}9238135$
$\log AF = 2{,}9862829$

$AF = 968{,}91$, welche Größe von A nach F getragen wird. Beschreibt man dann aus F als Centrum mit dem Radius FB einen Kreisbogen, so ist dieser der verlangte Meridian; seine Endpuncte werden mit 50° und 130° (d. i. mit 50° und 180° — 50°) bezeichnet.

Wenn alle nothwendige Meridiane projicirt sind, so zieht man die Parallelkreise, wie folgende Beispiele hinlänglich ausweisen.

1) Den nördlichen Parallelkreis von 50° Breite zu zeichnen.

$\lambda' = 50°$, $\lambda = 30°$; $\frac{\lambda' + \lambda}{2} = 40°$, $\frac{\lambda - \lambda'}{2}$ oder $\frac{\lambda' - \lambda}{2} = 10°$.

$\log 1000 = 3{,}0000000$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$
$\log \cos \lambda = \bar{1}{,}9375306$
$\log \left(\frac{1000 \cos \lambda}{2}\right) = 2{,}6365006$
$-\log \sin \left(\frac{\lambda + \lambda'}{2}\right) = 0{,}1919325$
$-\log \cos \left(\frac{\lambda' - \lambda}{2}\right) = 0{,}0066485$
$\log S = 2{,}8350816$ $S = 684{,}04$
$\log \cos \lambda' = \bar{1}{,}8080675$
$-\log \cos \lambda = 0{,}0624694$
$\log T = 2{,}7056185$ $T = 507{,}71$

Den Werth von S trage man von C nach G; und aus G als Centrum beschreibe man mit dem Radius GH = T einen Kreis, welcher der verlangte Parallelkreis ist.

2) Den Equator zu zeichnen.

$\log 1000 = 3{,}0000000$
$-\log \text{tang} \lambda = 0{,}2385606$
$\log S = 3{,}2385606$ $S = 1732{,}05$
$-\log \cos \lambda = 0{,}0624694$
$\log T = 3{,}3010300$ $T = 2000$

S wird von C nach I aufgetragen, und aus I als Centrum mit dem Radius IK = T ein Kreis beschrieben, welcher den Equator vorstellt.

3) Den südlichen Parallelkreis von 20° Breite zu zeichnen.

Man rechne:

Digitized by Google

$\lambda' = 20°$ $\quad \log\left(\frac{1000\cos\lambda}{2}\right) = 2{,}6365006$

$\lambda = 30°$

$\frac{\lambda+\lambda'}{2} = 25°$ $\quad -\log\sin\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2}\right) = 1{,}0597040$

$\frac{\lambda-\lambda'}{2} = 5°$ $\quad -\log\cos\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right) = 0{,}0427243$

$\log S = \bar{3},7389289 \quad S = 5481{,}9$

$\log\cos\lambda' = \bar{1},9729858$

$-\log\cos\lambda = 0{,}0624694$

$\log T = \bar{3},7743841 \quad T = 5948{,}2$

S wird in CL aufgetragen, und aus L mit dem Radius ML = T ein Kreisbogen beschrieben.

4) Einen südlichen Parallelkreis zu zeichnen, dessen Breite mehr als λ beträgt, z. B. den von 40° südlicher Breite.

$\lambda' = 40°$ $\quad \log\left(\frac{1000\cos\lambda}{2}\right) = 2{,}6365006$

$\lambda = 30°$

$\frac{\lambda+\lambda'}{2} = 35°$ $\quad -\log\sin\left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right) = 1{,}0597040$

$\frac{\lambda'-\lambda}{2} = 5°$ $\quad -\log\cos\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right) = 0{,}0866355$

$\log S = \bar{3},7828401 \quad S = 6065{,}1$

$\log\cos\lambda' = \bar{1},8842540$

$-\log\cos\lambda = 0{,}0624694$

$\log T = \bar{3},7295635 \quad T = 5363{,}9$

Im gegenwärtigen Falle wird S von C zur Linken in CN aufgetragen, und wie vorhin aus N mit einem Radius NP = T ein Kreisbogen beschrieben.

229) Die Projection einer Hemisphäre auf den Meridian irgend eines Punctes erfordert folgendes Verfahren. (Fig. XLIII.)

(Erläuterung (147) und folgende.)

Man ziehe einen Kreis und in demselben zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser. Die Endpuncte des einen bezeichne man mit Nord, Süd und die Endpuncte des andern mit West, Ost, so, daß wenn Nord oben und Süd unten ist, zur Rechten Ost und zur Linken West liege.

Digitized by Google

Der Kreis bedeutet den Meridian, worauf projicirt wird; wir nehmen ihn hier als den ersten an. Der Durchmesser Nord, Süd bedeutet den Meridian, dessen Länge 90° ist. Der Durchmesser Ost, West stellt den Equator vor.

Nachdem man sich wie im vorhergehenden Paragraphen einen verjüngten Maaßstab gebildet hat, kann man Meridiane und Parallelkreise ziehen, wie folgende Beispiele lehren.

1) Den Meridian von 30° Länge zu zeichnen.

Man rechne:

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$\log \text{tang } 30° = \bar{1}{,}7614394$$
$$\log M = 2{,}7614394 \quad M = 577{,}35$$

Den Werth von M trage man vom Centrum an auf den Durchmesser Ost, West nach beiden Seiten desselben in CM, und beschreibe aus den so bestimmten Puncten M als Mittelpuncten zwei Kreise, welche durch die Puncte Nord, Süd gehen; dann wird der eine dieser Kreisbogen den Meridian von 30° Länge, und der andere den Meridian von 180°—30° oder 150° Länge vorstellen.

Anmerkung. Es ist keine allgemeine, sondern nur eine besondere Eigenschaft der hier gewählten Meridiane, daß jeder durch das Centrum des andern geht.

2) Die Parallelkreise von 30° nördlicher und südlicher Breite zu zeichnen.

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$-\log \sin \lambda = 0{,}3010300$$
$$\log S = 3{,}3010300 \quad S = 2000$$
$$\log \cos \lambda = \bar{1}{,}9375306$$
$$\log T = 3{,}2385606 \quad T = 1732{,}05$$

Man trage S vom Centrum an nach beiden Seiten des Durchmessers Nord-Süd in CS; und beschreibe aus den Puncten S als Mittelpuncten mit den Radien ST = T zwei Kreisbogen, welche die verlangte Parallelkreise sind.

Fünftes Kapitel.

Construction einer Charte nach der modifizirten Flamsteed'schen Projection.

230) In dem gegenwärtigen Kapitel werden wir in einem Beispiele das Verfahren auseinandersetzen, welches bei der Vermessung eines Landes zu beobachten ist, wenn von demselben eine Charte nach der oben genannten Projections-Art gezeichnet werden soll

Digitized by Google

Wir müssen hauptsächlich zeigen, wie die Randlinien der zur Detail-Aufnahme bestimmten Blätter construirt, und wie auf diese Blätter die Puncte des trigonometrischen Netzes aufgetragen werden.

(Erläuterung (179) und folgende.)

Beispiel.

Das aufzunehmende Land erstreckt sich ohngefähr, und zwar höchstens, vom 48ten Grade nördlicher Breite bis zum 55ten.

Es nimmt 6 Längen-Grade ein.

Der verjüngte Maaßstab ist wie 1 : 10000.

Die größte Abweichung, welche man in den auf der Charte befindlichen Winkeln von ihrem wahren Werthe dulden will ist 4′ *).

Man fragt: in wie viele Zonen muß das Land getheilt werden?

(Erläuterung (179, 180 und 181, 1).)

Hierzu ist folgende Rechnung:

Größte Breite . . . . 55°
Kleinste Breite . . . . 48°
Halbe Summe . . . . 51°, 30′.

Hälfte der Längengrade, welche das Land einnimmt . . . . 3° = 10800″
Geduldete Abweichung . . . . 4′ = 240″.

log 240 = 2,38021
— log 10800 = $\bar{5}$,96658
— log sin 1″ = 5,31443
— log cos (51°, 30′) = 0,20585
log Δλ = 3,86707

Δλ = 7363″ = 2°, 2′, 43″; dieß doppelt giebt 4°, 5′, 26″. Soviel darf jede Zone an geographischer Breite einnehmen. Das ganze Land umfaßt 7°; also ist eine Zone nicht hinreichend, um dasselbe zu bedecken. Man nehme deshalb zwei Zonen, deren jede 3°, 30′ Breite erhält.

Will man dann wissen, wie groß der Irrthum in den projicirten Winkeln seyn kann, so rechne man wie folgt:

Die Hälfte von 3°, 30′ ist 1°, 45′ = 6300″; ferner

*) Man muß wohl verstehen, daß hier nur solche Irrthümer gemeint werden, welche eine nothwendige Folge der Projection selbst sind. Diese häufen sich nicht an, und können deshalb zum Theil geduldet werden.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \log 6300 &= 3{,}7993 \\ \log 10800 &= 4{,}0334 \\ \log\cos(51°, 30') &= \bar{1}{,}7942 \\ \log\sin 1'' &= \bar{6}{,}6855 \\ \log\alpha &= 2{,}3124 \end{aligned}\right\}$$

$\alpha = 206'' = 3', 26''$, welches der größte Unterschied ist, der zwischen einem projicirten Winkel und dem wirklichen Winkel Statt haben kann.

231) Man bestimme nun die Ausdehnung jedes einzelnen Detail-Blattes in geographischer Breite und Länge, wie folgt:

Der Maaßstab, nach welchem aufgenommen wird, ist wie 1 : 10000.

Das Papier hat Raum für ein Quadrat von ohngefähr $\overset{\text{Met.}}{0{,}55}$ Seite.

Rechnung.

$$\begin{aligned} \log 0{,}55 &= \bar{1}{,}740 \\ \log 10000 &= 4{,}000 \\ -\log R &= \bar{7}{,}196 \\ -\log\sin 1'' &= 5{,}314 \\ \log\delta\lambda &= 2{,}250 \\ \delta\lambda &= 178'' = 2', 58'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\delta\lambda &= 2{,}250 \\ -\log\cos(51°, 30') &= 0{,}206 \\ \log\delta p &= 2{,}456 \\ \delta p &= 286'' = 4', 46''. \end{aligned}$$

$\delta\lambda$ ist die Ausdehnung in geographischer Breite und δp die in geographischer Länge, welche jedes Blatt einnehmen darf.

Um für die Folge die Rechnung zu vereinfachen gebe man jedem Blatte 3′ Breite und 4′, 30″ Länge.

Die Anzahl der Blätter, welche auf eine Zone gehen, kann man dann auch leicht durch folgende Rechnung finden.

Die Breite der Zone ist $3°, 30' = 210'$; ihre Länge $6° = 360'$

$$\frac{210'}{3'} = 70; \quad \frac{360'}{4', 30''} = 80.$$

Die Zone hat also 70 Blätter in der Breite, und 80 in der Länge, zusammen $70 \times 80 = 5600$.

232) Man bilde sich eine Tabelle mit folgenden Rubriken:

Digitized by Google

Breiten.		log. N.	diff.	log. γ.	diff.	$\delta\lambda_1$ für 3′.	diff.
Gr.	M.						

In die erste Colonne schreibe man alle Breiten, welche in der Charte vorkommen, von 10′ zu 10′, indem man mit der kleinsten anfange.

Um die zweite Reihe auszufüllen, mache man folgende Rechnung: (182, c).

2 log sin der Breite = ... log a = 6,8046154

Hierzu die Größe $\bar{3},1475982 = \log \frac{1}{2} K e^2$ dazu C = ...

log C = ... log N = ...

Dann ist log N derjenige, welcher der Breite zugehört, deren log. sin. man genommen hat.

Zum Beispiel.

2 log sin 52°, 40′ = $\bar{1},80087$ log a = 6,8046154

$\bar{3},14759$ C = 0,00088809

log C = $\bar{4},94846$ log N = 6,8055035.

In der dritten Reihe stehen die Differenzen jeder zwei auf einander folgenden log N. Diese werden zum Einschalten gebraucht, wie die Differenzen in den logarithmischen Tafeln.

Die 4te Reihe wird folgendermaaßen ausgefüllt:

Zu der Zahl 6,8018056 = log (a(1 − e²))

addire 3 C = ... , so ist die Summe das gesuchte

log γ = ...

In der 5ten Colonne stehen die Differenzen der log γ.

Die 6te Reihe enthält Zahlen, welche berechnet werden, wie folgt: man nehme die Ausdehnung, welche jedes Blatt in geographischer Breite hat, hier 3′ = 180″ und setze:

log 180 = 2,2552725
log sin 1″ = $\bar{6},6855749$
Summe = $\bar{4},9408474$

Diese Summe addire man zu jedem log γ, und suche die Zahl, welche dem als einen Logarithmen betrachteten Resultate zugehört; diese schreibe man dem log γ gegenüber in die 5te Colonne. Hier einen Theil der fraglichen Tabelle.

Digitized by Google

Breiten.		log N.	diff.	log γ.	diff.	$\delta\lambda_{\text{I}}$ für 3′.	diff.
Gr.	M.						
52	»	6,8054877		6,8044227		5562,51	
			40		119		0,15
»	10	6,8054917		6,8044346		5562,66	
			40		119		0,15
»	20	6,8054957		6,8044465		5562,81	
			39		118		0,15
»	30	6,8054996		6,8044583		5562,96	
			39		118		0,15
»	40	6,8055035		6,8044701		5563,11	
			39		118		0,15
»	50	6,8055074		6,8044829		5563,26	
			39		118		0,15
53	»	6,8055113		6,8044947		5563,41	
			39		118		0,15
»	10	6,8055152		6,8045065		5563,56	
			39		117		0,15
»	20	6,8055191		6,8045182		5563,71	
			39		117		0,15
»	30	6,8055230		6,8045299		5563,86	
			39		117		0,15
»	40	6,8055269		6,8045416		5564,01	
			39		117		0,15
»	50	6,8055308		6,8045533		5564,16	
			39		117		0,15
54	»	6,8055347	.	6,8045650	.	5564,31	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

233) Man beschäftige sich von nun an mit jeder Zone ins Besondere; nehmen wir hier z. B. die nördliche.

Man berechne die Radien der Parallelkreise, welche die Blätter begrenzen sollen, wie folgt:

Digitized by Google

Die größte Breite in unserer Zone ist 55°

Hiervon ziehe man die Hälfte der Breite, welche die Zone einnimmt, 1°, 45′ ab.

Bleibt mittlere Breite 53°, 15′ = λ.

Man nehme aus der Tabelle des vorhergehenden §. den zu dieser Breite gehörigen

$$\log N = 6{,}8055172$$

dazu $\log \cot \lambda = \bar{1}{,}8731668$, so erhält man

$$\log N \cot \lambda = 6{,}6786840$$

$$N \cot \lambda = 4771820 \text{ Meter.}$$

Hierauf construire man eine Tabelle mit folgenden Rubriken.

Breiten.		$\delta\lambda$ (1)	Radien d. Parallelkreise.	log. derselben.
Gr.	M.			

In die erste Colonne schreibe man alle Breiten der Parallelkreise, welche die Blätter begrenzen; man erhält diese, wenn man von der mittleren Breite, d. i. 53°, 15′ ausgeht, und immer 3′ dazu addirt, bis man die größte Breite, welche in der Zone vorkömmt, erreicht hat; dann ebenso von 53°, 15′ immer 3′ abzieht, bis man die kleinste Breite erhält.

Hierauf suche man in der Tabelle (232) die $\delta\lambda$ (1), welche zu den hier niedergeschriebenen Breiten gehören, und fülle damit die zweite Colonne aus.

Dann nehme man den Radius des mittleren Parallelkreises, nämlich das oben gefundene $N \cot \lambda = 4771820$ Meter; ziehe von diesem das der Breite 53°, 18′ zugehörige $\delta\lambda$ (1) ab, so hat man den Radius des Parallelkreises von 53°, 18′. Um den folgenden, nämlich den Radius des Parallelkreises von 53°, 21′ Breite zu erhalten, muß man von dem eben gefundenen das $\delta\lambda$ (1), welches zu 53°, 21′ gehört, abziehen, u. s. w.

Für kleinere Breiten als die mittlere wird ebenso verfahren, nur müssen die $\delta\lambda$ (1) addirt und nicht subtrahirt werden.

Die log. der Zahlen, welche die dritte Reihe ausfüllen, werden in die 4te geschrieben. Hier einen Theil der Tabelle.

Digitized by Google

Breiten.		$\delta\lambda$. 1	Radien d Parallelkreise.	log. derselben.
Gr.	M.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	..	.	.
»	51	5564,21	4705054	6,6725616
»	48	5564,16	4710618	6,6730778
»	45	5564,11	4716182	6,6735906
»	42	5564,06	4721746	6,6741027
»	39	5564,01	4727310	6,6746141
»	36	5563,96	4732874	6 6751250
»	33	5563,91	4738438	6,6756353
»	30	5563,86	4744002	6,6761449
»	27	5563,81	4749565	6,6766539
»	24	5563,76	4755129	6,6771623
»	21	5663,71	4760693	6.6776702
»	18	5563,66	4766256	6,6781772
53	15	———	4771820	6.6786840
»	12	5563,59	4777384	6,6791901
»	9	5563,54	4782947	6,6796956
»	6	5563,49	4788511	6,6802005
»	3	5563,44	4794074	6,6807048
52	»	5563,39	4799638	6,6812084
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

234) Nachdem die Radien der Parallelkreise bestimmt sind, wird eine neue Tabelle unter dem Titel, Tabelle aller Θ, gebildet, welche mit doppeltem Eingange und auf nachstehende Weise eingerichtet ist.

Die erste verticale Colonne trägt die Rubrik, Breiten, und enthält die nämlichen Größen wie im vorigen §.

In der obern horizontalen Reihe stehen die vom mittleren Meridianen her gezählten Längen der Eckpuncte der Blätter, nämlich 4′, 30″, dann hiervon das Doppelte 9′, das Dreifache 13′, 30″, das Vierfache 18′ u. s. w. bis zu der Hälfte der Längengrade, welche die Zone einnimmt, hier bis zu 3°.

Digitized by Google

Die Tabelle wird ausgefüllt wie hier folgt.

Man nehme 4′, 30″ = 270″ = p; wähle dann irgend eine in der Tabelle befindliche Breite, sie heiße λ′; suche den zugehörigen log N (232), er heiße log N′; dann den zu λ′ gehörigen log. Rad. Parallelkr. oder log r (233); mache mit diesen Größen folgende Rechnung:

log p = ...
log N′ = ...
log cos λ′ = ...
— log r = ...
log Θ = ...
Θ = ...

Den Werth von Θ schreibe man in die unter 4′, 30″ stehende Colonne, der Breite λ′ gegenüber.

Ist so die zweite Colonne unserer Tabelle ausgefüllt worden, so schreibe man in die dritte die Doppelten der Größen, welche in der zweiten stehen; die 4te Reihe enthält ihre Dreifache u. s. w.

Hier einen Theil der

Tabelle aller Θ.

Breiten.		4′, 30″	9′	13′, 30″	18′	22′, 30″	27′	31′, 30″	36′	40′, 30″	45′	
Gr.	M.											
			.	.	.	.	.	.	.			
			.	.	.	.	.	.	.			
»	30	3′, 36″, 3361	.	.	.	.	.	.	.	32′, 27″, 025	36′,	3″, 361
»	27	3′, 36″, 3370	.	.	.	.	.	.	.	32′, 27″, 033	36′,	3″, 370
»	24	3′, 36″, 3376	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
»	21	3′, 36″, 3380	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
»	18	3′, 36″, 3384	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
53	15	3′, 36″, 3384	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	12	3′, 36″, 3384	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	9	3′, 36″, 3382	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	6	3′, 36″, 3375	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	3	3′, 36″, 3368	.	.	.	.	.	.	.	32′, 27″, 031	36′, 3″, 368	
52	»	3′, 36″, 3361	.	.	.	.	.	.	.	32′, 27″, 025	36′, 3″, 361	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Doppelte der vorhergehenden Größen — Dreifache — Vierfache — Fünffache — Sechsfache — Siebenfache — Achtfache — Neunfache — Zehnfache

In dieser Tabelle findet man durch die Breiten und Längen der Eckpuncte der Blätter die ihnen zugehörigen Θ.

Digitized by Google

235) Nachdem alles Vorhergehende geschehen ist, kann man zur Berechnung der Coordinaten der Eckpuncte der Blätter übergehen, wobei folgendermaaßen verfahren wird.

Zum Beispiele.

Berechnung der Coordinaten des Punctes, dessen Breite = 53°, 30′
und dessen Länge vom mittleren Meridiane her = 40′, 30″ ist, gleichviel ob östlich oder westlich.

Aus der Tabelle (234) findet man $\Theta = 32', 27'', 025$; dann aus (233) log. Radius Parallelkreis oder $\log r = 6{,}6761449$. Nun rechne man:

$\log \sin \Theta = \bar{3}{,}9749400$	$\log \cos \Theta = \bar{1}{,}9999807$
$\log r = 6{,}6761449$	$\log r = 6{,}6761449$
$\log x = 4{,}6510849$	$\log n = 6{,}6761256$
$x = 44781$ M.	$n = 4743791$ dieß von
	$N \cot \lambda = 4771820$ abgezogen
	bleibt $y = .. 28029$ Met.

x und y sind die gesuchten Coordinaten.

Anmerkung. Wenn der fragliche Punct eine geringere Breite als die mittlere 53°, 15′ gehabt hätte, so wäre die Rechnung die nämliche wie vorhin gewesen, jedoch mit der Veränderung, daß N cot λ von n hätte abgezogen werden müssen, da hingegen hier dieses von jenem subtrahirt wird.

Die Coordinaten x und y gelten für zwei verschiedene Puncte, wovon der eine um 40′, 30″ östlich, der andere um eben so viel westlich vom mittleren Meridiane entfernt ist; es verhält sich ebenso mit den Θ.

236) Wenn man die Coordinaten der Eckpuncte der Blätter kennt, so ist nichts leichter als ihre Randlinien zu construiren, wie schon in (180) hinlänglich gezeigt ist; wir wollen jedoch hier ein Beispiel davon geben.

Digitized by Google

Längen der Puncte.

Breiten der Puncte.			40′, 30″	45′
53°	30′	$x_1 = 44781$	$x_2 = 49755$	
		$y_1 = 28029$	$y_2 = 28079$	
53°	27′	$x_4 = 44833$	$x_3 = 49814$	
		$y_4 = 22466$	$y_3 = 22516$	

Nehmen wir an, die Breiten und Längen der Puncte nebst ihren Coordinaten seien immer wie hier eingeschrieben und numerirt, so kann wörtlich verfahren werden wie folgt:

Man ziehe am Rande des zum Blatte bestimmten Papieres von oben nach unten eine gerade Linie AC (Fig. LXIV.); zur Rechten, wenn es ein westliches Blatt werden soll, zur Linken für ein östliches, wie wir es hier unterstellen wollen.

Nahe am obern Ende dieser Linie nehme man den Punct A nach Willkühr an; trage den Unterschied $y_2 - y_1$, hier 50, von A nach B; dann $y_1 - y_4$, nämlich 5563 in BC; mache $CD = y_3 - y_4 = 50$; errichte in A, D und C auf die Linie AC Perpendikel, und mache $AG = x_2 - x_1 = 4974$, $DF = x_3 - x_1 = 5033$ und $CE = x_4 - x_1 = 52$, so werden die gesuchten Eckpuncte E, B, G, F, bestimmt seyn. Zwischen B und E, G und F sind Meridiane enthalten, welche man als gerade Linien ziehen darf. Um zu finden, ob es auch erlaubt sei, die Parallelkreisbogen als solche zu betrachten, ist folgende Rechnung zu machen.

$2 \log DF = 7{,}404$
$-\log r\,(235) = \bar{7}{,}323$
$-\log 8 = \bar{1}{,}097$
$\log h = \bar{1}{,}824$
$h = 0{,}66$ Met.

So lange dieses h, welches den größten Abstand der Parallelkreisbogen EF und BG von den Sehnen EF und BG ausdrückt, zu klein ist, als daß es in dem Maaßstabe, wonach man die Charte zeichnet, bemerkt werden könnte, darf man die Sehnen mit den Bogen verwechseln, das heißt, letztere als gerade Linie ziehen. Wird h aber bedeutend, so muß es auf ein Perpendikel getragen werden, welches man auf die Mitte der Sehne EF errichtet, und der Parallelkreis wird dann durch den Endpunct des Perpendikels und durch E und F gehen.

Digitized by Google

237) Hat man die Randlinien der Blätter gezeichnet, so muß man die Puncte des trigonometrischen Netzes auf diese Blätter projiciren. Man kennt hierzu, wenigstens für die Eckpuncte der Dreiecke erster Ordnung, ihre geographischen Längen und Breiten. Durch diese sieht man sogleich, in welches Blatt der Punct fällt; wäre z. B. seine Breite $= 53°, 28', 35'', 15$ und seine Länge vom mittleren Meridiane her $= 43', 37'', 39$, so würde der Punct offenbar in das vorhin construirte Blatt fallen müssen. Die Coordinaten desselben werden nun berechnet wie folgt:

Die Tabelle aus (232) giebt für eine Breite von 53°, 28′, 35″, 15 die Werthe

$$\log N = 6{,}8054986\,,\quad \log \gamma = 6{,}8044554.$$

Man suche in der Tabelle (233) die nächstkleinere Breite von 53°, 28′, 35″, 15, welche 53°, 27′ ist, ziehe diese von der gegebenen ab, woher man den Unterschied 95″,15 erhält; man rechne dann:

$$\begin{aligned} \log \sin 1'' &= \bar{6},6855749 \\ \log 95,15 &= 1,9784088 \\ \log \gamma &= 6,8044554 \\ \log \delta\lambda_1 &= \overline{3,4684391} \\ \delta\lambda_1 &= 2940{,}6\ \text{M.} \end{aligned}$$

Das erhaltene $\delta\lambda_1$ ziehe man von dem Radius des Parallelkreises v. 53°, 27′, welcher 4749565 ist, ab; also 2941

bleibt . . . . . 4746624 = r.

Nun folgende Rechnung:

gegebene Länge 43′, 37″, 39 = 2617″,39 und davon der

$$\begin{aligned} \log \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots 3{,}4178684 \\ \log N &= \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{6},8054986 \\ \log\cos(53°, 28', 35'', 15) &= \bar{1},7746290 \\ -\log r &= \overline{7,3236152} \\ \log \Theta &= 5{,}3216112 \\ \Theta &= 2097'',061 = 34',57'',061 \end{aligned}$$

Dieß ist das Θ unseres Punctes. Seine Coordinaten werden durch die nämliche Rechnung wie (235) gefunden, also:

$$\begin{aligned} \log \sin\Theta &= \bar{2},0071671 \\ \log r &= 6{,}6763848 \\ \log x &= \overline{4,6835519} \\ x &= 48256 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\Theta &= \bar{1},9999775 \\ \log r &= 6{,}6763848 \\ \log n &= \overline{6,6763623} \\ n &= 4746378 \\ N\cot\lambda &= 4771820 \\ y &= \ldots 25442 \end{aligned}$$

Digitized by Google

Aus dieſen Werthen der Coordinaten iſt leicht zu ſehen, wo der Punct hinkömmt; um ihn aufzutragen, kann man folgende Conſtruction machen: man ziehe von dem eben beſtimmten y das y des Punctes C, nämlich 22466 ab; den Reſt 2976 trage man von C nach N; errichte in N ein Perpendikel N M und mache daſſelbe ſo lang als der Unterſchied zwiſchen dem x des Punctes B und dem vorhin gefundenen beträgt; dieſer iſt 48256—44781 oder 3475; trägt man alſo 3475 Meter von N bis M, ſo iſt M der verlangte Punct.

238) Wir wollen nun auch zeigen, wie ein Punct, deſſen geographiſche Länge und Breite nicht bekannt ſind, auf die Charte projicirt werden kann. (Erläuterung (182, i).)

Unterſtellen wir z. B., daß man in dem Blatte Fig. LXIV die Puncte P und M projicirt habe, und man wolle die Lage des Punctes Q blos durch die Kenntniß der wirklichen Winkel *) des Dreieckes PQM finden.

Man conſtruire das Dreieck ohngefähr, indem man die wirklichen Winkel deſſelben mit dem Transporteur auftrage. Das ſo erhaltene vorläufige Dreieck ſei Pq'M. Man ziehe hierauf durch P und M die Linie P m, M m', welche mit einem der Meridiane am Rande des Blattes parallel laufen, und folglich beinahe die Richtungen der Meridiane von P und M haben. Man meſſe nun mit dem Transporteur (je nachdem das Blatt ein öſtliches oder ein weſtliches iſt) den nordöſtlichen oder den nordweſtlichen Azimuth des einen Schenkels des Winkels q'PM und zwar desjenigen Schenkels, welcher den kleineren Azimuth, hier q'P m bildet. Das nämliche thue man in M, wo es jedoch nöthig iſt die Schenkel des Winkels q'MP nach Mp und Mq zu verlängern, um nordöſtliche Azimuthe zu haben **).

Iſt dieſes geſchehen, ſo kann man durch folgende Rechnung finden, wie groß die Winkel P und M auf der Charte ſeyn müſſen.

Man nenne den wirklichen Winkel . . . . . α

Den ohngefähren gemeſſenen Azimuth V

Den Reſt, welcher bleibt, wenn man die Breite der Spitze des Winkels α von der mittleren Breite der Zone abzieht . . . . . $\Delta\lambda$

---

*) Man muß hier einen Unterſchied zwiſchen den wirklichen Winkeln des Dreieckes und den Winkeln auf der Charte machen.

**) Es iſt dann auch wohl zu bemerken, daß der Winkel pMq und nicht q'MP betrachtet wird, welches zwar im gegenwärtigen Falle nichts zur Sache thut, da dieſe Winkel Vertical-Winkel ſind, aber ſtreng beachtet werden müßte, wenn der durch die Verlängerung entſtandene Winkel der Nebenwinkel des andern wäre, weil dann die Correction, welche zu dem einen addirt werden muß, von dem andern abzuziehen iſt.

Digitized by Google

Die Länge der Spitze des Winkels vom mittleren Meridiane her gezählt . . . . . p
Die mittlere Breite der Zone . . . . . λ

Rechnung für M.

$\alpha = 75°, 8', 30''$ $\quad$ $\lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 53°, 15'$
$2V = 138°$ $\quad$ Ohngefähre Breite von M *) . . . $53°, 28', 30''$
$2V + \alpha = 213°, 8', 30''$ $\quad$ $\Delta\lambda = -13', 30'' = -810''.$
$p = 43', 37'' = 2617''$

$\log \sin \alpha = \bar{1},98523$
$\log \sin (2V + \alpha) = \bar{1},73776$
$\log p = 3,41780$
$\log \Delta\lambda = 2,90848$
$\log \sin 1'' = \bar{6},68557$
$\log \cos \lambda = \bar{1},77694$
$\log C = 0,51178$

C hat das entgegengesetzte Zeichen des Productes $\Delta\lambda \cdot \sin(2V + \alpha)$; hier sind beide Factoren negativ, also C auch negativ, mithin . . . . $C = -3'', 25$
hierzu $\alpha = 75°, 8', 30'', 00$
Winkel M auf der Charte $= 75°, 8', 26'', 75$

Rechnung bei P.

$\alpha = 47°, 31', 23'', 14$ $\quad$ $\lambda = \ldots\ldots\ldots 53°, 15'$
$2V = 43°$ $\quad$ Breite von P . . . $= 53°, 28'$
$2V + \alpha = 90°, 31', 23'', 14$ $\quad$ $\Delta\lambda = -13' = -780''$
Länge von P oder $p = 41', 15'' = 2475''.$

$\log \sin \alpha = \bar{1},86779$
$\log \sin (2V + \alpha) = \bar{1},99998$
$\log p = 3,39357$
$\log \Delta\lambda = 2,89209$
$\log \sin 1'' = \bar{6},68557$
$\log \cos \lambda = \bar{1},77694$
$\log C = 0,61594$

$C = \ldots\ldots + 4'', 13$
$\alpha = 48°, 31', 23'', 14$
Winkel P auf der Charte $= 47°, 31', 27'', 27.$

*) Man sehe die Anmerkung am Ende des §.

Digitized by Google

Wenn nun, wie vorhergeht, die projicirten Winkel des Dreieckes PMQ bei P und M bestimmt sind, so lassen sich die Seiten desselben wie gewöhnlich berechnen, indem man von der bekannten Seite PM ausgeht, wobei jedoch zu bemerken ist, daß hier unter PM, die Größe, welche diese Linie auf der Charte hat, verstanden werden muß. Wenn diese nicht aus vorhergehenden Rechnungen bekannt wäre, so könnte man sie durch die Coordinaten von P und M finden; allein es wird immer hinreichend genau seyn, die Linie PM auf dem verjüngten Maaßstabe zu messen.

Anmerkung. Man könnte sich des im gegenwärtigen Paragraphen erklärten Mittels bedienen, um alle Puncte des trigonometrischen Netzes zu projiciren, nachdem zwei derselben bestimmt wären, wodurch man die oft äußerst weitläufige Berechnung ihrer Längen und Breiten, so wie auch die der Coordinaten ganz vermeiden würde. Man braucht zwar hierzu die ohngefähren Längen und Breiten der einmal festgelegten Puncte; allein nicht nur diese ohngefähren Längen und Breiten, sondern sogar solche, welche bis auf Zehntheile von Secunden genau sind, lassen sich finden, wenn einmal die Lage des Punctes auf einem Blatte gegeben ist. Sollte man z. B. auf der Fig. LXIV die Breite von M finden, so ziehe man MO mit BG parallel, und sehe wieviele Theile EO von EB enthält, welches man auf mancherlei Wegen leicht finden kann. Wir erhalten hier 0,528. Dieß mit dem ganzen EB oder 3′ multiplizirt, giebt 1′, 35″, 04; addirt man hierzu die Breite von E oder . . . . . 53°, 27′ . . .; so erhält man für die Breite von M . . . . . 53°, 28′, 35″, 04, welche von der wahren Breite . . . . . 53°, 28′, 35″, 15 nur um 0″, 11 verschieden ist. Bei einer größern, im gehörigen Maaßstabe construirten Figur wäre der Irrthum gewiß noch viel kleiner geworden.

Ebenso läßt sich auch die Länge eines auf dem Blatte befindlichen Punctes bestimmen; man hat also alle nothwendige Elemente, um die Winkel der Dreiecke auf der Charte aus ihren wirklichen Winkeln zu berechnen, und so die Puncte des trigonometrischen Netzes weit leichter als nach irgend einer andern Methode aufzutragen.

239) In allem Vorhergehenden haben wir den Fall betrachtet, wo eine Charte erst aufgenommen werden soll. Ist dieses schon geschehen, so, daß nur mehr von dem Zusammentragen aller Blätter nach einem kleinern Maaßstabe die Rede ist, so muß man auch wie in (231) die Ausdehnung der Blätter nach der Größe des Papieres und des

Digitized by Google

Maaßstabes berechnen; allein die Charte braucht nicht in mehrere verschiedene Zonen eingetheilt zu werden. Als Randlinien der Blätter würden wir auch hier Parallelkreise und Meridiane vorziehen, deren Durchschnittspuncte bestimmt werden wie vorhin.

Man darf sich hier nicht immer darauf beschränken, blos diejenigen Parallelkreise zu zeichnen, welche die Blätter begrenzen sollen, sondern man muß ihre Zwischenräume klein genug annehmen, damit das Stück Meridian, welches zwischen zwei auf einander folgenden liegt, als eine gerade Linie betrachtet werden könne. Um zu finden, welche Entfernungen hierzu die Parallelkreise höchstens von einander haben dürfen, ist folgende Rechnung zu machen. (Erläuterung (172).)

Die größte geographische Länge vom mittleren Meridiane her, welche auf der Charte vorkömmt, heiße in Secunden . . . . . p

Die größte Anzahl Meter, welche nach dem Maaßstabe der Charte nicht mehr merklich ist . . . . . δ

Die mittlere Breite der Charte . . . . . λ

Die gesuchte Entfernung der Parallelkreise . . . . . d

Der mittlere Radius der Erde . . . . . R

Ist z. B. der Maaßstab wie 1 : 10000, so kann man $\delta = 10$ annehmen; es sei auch $p = 3° = 10800''$, $\lambda = 51°, 30'$; man nehme

$\log \delta = 1{,}00000$
$\log 2 = 0{,}30103$
$-\log R = \bar{7}{,}19655$
$-\log p = \bar{5}{,}96658$
$-3 \log \sin 1'' = 15{,}94328$
$-\log \cos \lambda = 0{,}20585$
$2 \log d = 6{,}61329$
$\log d = 3{,}30664$

$d = 2026'' =$ beinahe $34'$. In dem gegenwärtigen Beispiele kann man also die Parallelkreise von $30'$ zu $30'$ ziehen und dann die dazwischen liegenden Stücke der Meridiane als gerade Linien betrachten. Die Parallelkreise hingegen werden schon in kleinern Entfernungen eine merkliche Krümmung haben. Es ist jedoch nicht nöthig deshalb die Meridiane nahe bei einander zu zeichnen, sondern, wenn zwei nicht allzu weit von einander entfernte Puncte eines Parallelkreises bestimmt sind, so lassen sich durch die in (181, 4) angegebene und in (236) angewendete Methode so viele Zwischen-Puncte finden als man will. Uebrigens kann man, wenn einmal die Parallelkreise und einige Meridiane gezeichnet sind, ohne weiteres so viele neue Meridiane bestimmen, als man für nöthig hält, wie in (182, k) hinlänglich gesagt ist.

Digitized by Google

Wir schließen das gegenwärtige Kapitel mit der Bemerkung, daß, wenn man die Excentricität der Erde nicht beachten wollte, alle log N und log γ dem log des mittleren Radius der Erde gleich, und folglich die $\delta\lambda$ für 3′ immer die nämlichen wären, welches die Construction der Charte sehr vereinfachen würde.

Sechstes Kapitel.

Anlage einer Charte nach der Projection von Cassini ((184) und folgende.)

240) Wenn die Charte eines Landes nach der Projection von Cassini aufgenommen werden soll, so hat man das in folgendem Beispiele dargestellte Verfahren zu beobachten.

Das Land erstreckt sich von 48° bis 55° nördlicher Breite und nimmt 6 Längengrade ein.

Der verjüngte Maaßstab ist wie 1 : 10000.

Das Erste, was man thun muß, ist zu untersuchen, wieweit höchstens die Winkel auf der Charte von den wirklichen Winkeln abweichen können. Hierzu folgende Rechnung: (Erläuterung (191).)

Kleinste Breite in der Charte . . . . . 48°

Hälfte sämmtlicher Längengrade . . . . . 3° = 10800″.

2 log 10800 = 8,0668	J = 63″ = 1′, 3″. Dieß ist der größte Unterschied, welcher zwischen einem wirklichen Winkel und seiner Projection Statt haben kann. Wenn er mehr betrüge als der höchste Irrthum, den man in den Winkeln der Detail-Aufnahme dulden will, so müßte man das Land in mehrere Streifen theilen, deren jeder die ganze Breite der Charte, aber nur einen solchen Theil ihrer Länge einnähme, daß die wie oben berechnete Abweichung J in den Winkeln geduldet werden könnte.
log sin 1″ = $\bar{6}$,6856	
2 log cos 48° = $\bar{1}$,6510	
— log 4 = $\bar{1}$,3979	
log J = 1,8013	

241) Die Blätter sind hier Quadrate, deren wirkliche Größe man erhält, wenn man die Ausdehnung, welche sie auf dem Papiere haben, nach dem verjüngten Maaßstabe ausmißt. Sollen z. B. auf dem Papiere die Blätter 0,55 Met. zur Seite haben, so beträgt in der Wirklichkeit jede Seite eines Blattes 5500 Meter, weil der Maaßstab hier wie 1 : 10000 ist.

Digitized by Google

242) Man construire sich nun zur bessern Uebersicht, nach folgender Anleitung, die Fig. LXV, welche die ganze Charte in einzelne Blätter getheilt, vorstellt.

Man ziehe zuerst eine gerade Linie Ax und betrachte diese als den mittleren Meridian. Im Puncte A errichte man auf demselben die senkrechte Ay, welche die erste Perpendiculäre bezeichnet. Dem Puncte A gebe man die Nummer o und denke sich, daß er die kleinste Breite der Charte, nämlich 48°, habe, so daß die ganze Charte oberhalb der Linie Ay hin fallen muß, wo wir den Norden annehmen.

Man trage nun sowohl auf Ax als auch auf Ay lauter gleiche Entfernungen von 5500 Meter nach einem sehr kleinen Maaßstabe, und bestimme so die Theilungspuncte 1, 2, 3....., durch welche mit Ax und Ay die in der Figur angezeigten Parallellinien gezogen werden.

Es ist nicht nöthig genau zu wissen, wie viele solche Entfernungen aufgetragen werden müssen, weil sich dieses nachher von selbst ergiebt. Ohngefähr kann man es aber durch folgende Rechnung erfahren.

Breite der Charte . . . . . $7° = 25200''$

Halbe Länge derselben . . . . . $3° = 10800''$

$\log 25200 = 4{,}401$	$\log 10800 = 4{,}033$
$\log R = 6{,}804$	$\log R = 6{,}804$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}685$	$\log \cos 48° = \bar{1}{,}825$
$-\log 5500 = \bar{4}{,}259$	$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}685$
$\log Ax = 2{,}149$	$-\log 5500 = \bar{4}{,}259$
$Ax = 141$	$\log Ay = 1{,}606$
	$Ay = 40$

Man trage demnach 141 Stücke auf Ax und 40 zu beiden Seiten von Ay.

Die Anzahl aller Blätter, welche die Charte enthält, ist ohngefähr gleich dem Producte $2 . Ax \times Ay = 11280$.

243) Man bestimme nun die Breiten der Puncte 1, 2, 3.... auf der Linie Ax durch folgende Rechnung. (Erläuterung (114).)

Digitized by Google

$\log 5500 = 3{,}7403627$

$-\log a = \bar{7}{,}1953846$

$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$

$\log A = \bar{2}{,}2501724$ $\quad A = 2', 57'', 8985$

$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$

$\log B = 0{,}06101$ $\quad B = 1'', 1508$

$\log 3 = 0{,}47712$ $\quad A + B = 2', 59'', 0493$

$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$

$\log C = 0{,}23710$

Breite von (0) $= 48° \ldots\ldots\ldots$ davon $2 \log \sin = \bar{1}{,}74215$

dazu $A + B = 2', 59'', 0493$ $\quad \log C = 0{,}23710$

Summe $= 48°, 2', 59'', 0493$ $\quad \log M = \bar{1}{,}97925$

davon $M = \ldots\ldots 0'', 9533$

Breite von (1) $= 48°, 2', 58'', 0960 \ldots\ldots 2 \log \sin = \bar{1}{,}74282$

$A + B = 2', 59'', 0493$ $\quad \log C = 0{,}23710$

Summe $= 48°, 5', 57'', 1453$ $\quad \log M = \bar{1}{,}97992$

davon $M = \ldots\ldots 0, 9548$

Breite von (2) $= 48°, 5', 56'', 1905 \ldots\ldots 2 \log \sin = \bar{1}{,}74359$

$A + B = 2', 59'', 0493$ $\quad \log C = 0{,}23710$

Summe $= 48°, 8', 55'', 2398$ $\quad \log M = \bar{1}{,}98069$

davon $M = 0'', 9565$

Breite von (3) $= 48°, 8', 54'', 2833$

und so weiter bis die Breite gleich 55° wird.

Man findet noch:

Breite von (4) $= 48°, 11', 52'', 3748$

$\ldots\ldots$ (5) $= 48°, 14', 50'', 4648$

$\ldots\ldots$ (6) $= 48°, 17', 48'', 5534$

$\ldots\ldots$ (7) $= 48°, 20', 46'', 6405$

$\ldots\ldots$ (8) $= 48°, 23', 44'', 7261$

$\ldots\ldots$ (9) $= 48°, 26', 42'', 8105$

$\ldots\ldots$ (10) $= 48°, 29', 40'', 8928$

$\ldots\ldots$ (11) $= 48°, 32', 38'', 9740$

Anmerkung. Wenn man die Excentricität nicht beachten wollte, so brauchte man nur A zu 48° zu addiren, um die Breite von (1) zu erhalten; zu dieser wieder A gesetzt, giebt die Breite von (2) u. s. f.

Digitized by Google

244) Auf der in (242) construirten Figur kann man sogleich die Coordinaten der Eckpuncte eines Blattes finden und auch dasselbe so bezeichnen, daß seine Stelle noch dann erkannt werden kann, wenn es für sich allein genommen ist. $\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ numerire man Fig. LXVI so, daß man die Ziffern 5 und 9 bei die dem Anfangspuncte der Coordinaten A (Fig. LXV) zunächst gelegene Ecke β in der Art schreibt, daß jede derselben anzeigt, auf der wievielten Linie vom mittleren Meridiane oder der ersten Perpendiculäre her diese Ecke steht.

Da die Blätter Quadrate sind, so bedarf es keiner weitern Erklärung, um zu zeigen, wie ihre Randlinien construirt werden, sondern es bleibt uns nur noch übrig zu lehren, wie man die Puncte des trigonometrischen Netzes auf die Blätter projicirt, und wie die Richtung eines Meridianes auf jedes Blatt gezeichnet werden kann, welches letztere jedoch nur für den Fall unumgänglich nöthig ist, wenn der Aufnehmende sich der Bouſſole bedienen will.

245) Nehmen wir an, die Breite eines zu projicirenden Punctes des trigonometrischen Netzes sei $\lambda = 48°, 29', 20'', 251$; seine Länge vom mittleren Meridiane her sei östlich und $= 23', 35'', 025 = 1415'', 044 = P$.

Um diesen Punct aufzutragen rechne man: (Erläuterung (115).)

$2 \log P = 6{,}30154$
$\log \sin 2\lambda = \bar{1}{,}99677$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$
$\log A = 0{,}38182$
$A = 2'', 409$
dazu $\lambda = 48°, 29', 20'', 251$
$l = 48°, 29', 22'', 66$

l ist die Breite des Punctes, wo das y (die Ordinate) des gesuchten Punctes die Linie Ax begegnet.

Man nehme nun aus (243) die dem gefundenen l nächst kleinere Breite; sie ist die des Punctes (9), welches uns lehrt, daß der zu projicirende Punct auf eines derjenigen Blätter fällt, welche in der (9+1)ten d. i. in der 10ten mit Ay parallelen Reihe liegen.

Man rechne nun ferner: $l = 48°, 29', 22'', 66$
nächste Breite $= 48°, 26', 42'', 81$
Unterschied $\Delta = 2', 39'', 85 = 159'', 85$.

Digitized by Google

$\log \Delta = 2{,}2037126$
$\log \text{const.} = 1{,}4901903$
$\log u = 3{,}6939029$
$\log \text{const.} = \bar{3}{,}20878$
$\log v = 0{,}90268$
$\log 3 = 0{,}47712$
$\log \cos 2l = \bar{1}{,}08456$
$\log w = 0{,}46436$

u ist immer positiv, hier = + 4942,02
v ist immer negativ . . . = — 7,99
w hat das entgegengef. Zeichen v. cos 2l = + 2,91
Summe t = 4936,94

Berechnung der Ordinate.

$\log a = 6{,}8046154$
$\log P = 3{,}1507700$
$\log \cos \lambda = \bar{1}{,}8213591$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$
$\log A' = 4{,}4623194$
$- \log 2 = \bar{1}{,}69897$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$
$2 \log \sin \lambda = \bar{1}{,}74876$
$\log B' = 1{,}72089$

A′ = 28994,75 Met.
B′ = 52,59 Met. } addirt
y = 29047,34 Met.

Man dividire nun y durch 5500, so ist der ganze Theil im Quotienten 5 und der Rest $\rho = 1547{,}34$ Met. Die Zahl 5 zeigt an, daß der gesuchte Punct in der (5 + 1)ten mit A x parallelen Reihe Blätter liegt. Er fällt also in $\beta\gamma\delta\varepsilon$. Um ihn auf diesem Blatte zu bezeichnen, trage man von β nach F (Fig. LXVI) die Größe $t = 4936{,}94$ und erreichte in F ein Perpendikel $FK = \rho = 1547{,}34$, so wird K der verlangte Punct seyn.

246) Die vorhergehende Methode ist immer anwendbar um einen Punct auf die Charte zu projiciren, wie groß auch seine Entfernung von der ersten Perpendiculäre seyn mag. Wenn aber der Punct eine größere Länge als 30′ vom mittleren Meridiane her hätte, so müßte das Verfahren zum Theile gänzlich verlassen, zum Theile modifizirt werden, um richtige Coordinaten zu erhalten.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo die Länge P mehr als 30′, jedoch weniger als 3° beträgt:

Digitized by Google

Zum Beispiele. (Erläuterung (134, 2).)

$P = 47', 10'', 05 = 2830'', 05$; $\lambda = 49°, 19', 32'', 302$.

Rechnung.

$\log \text{tang}\,\lambda = 0{,}0658262$	$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	$\psi' = 49°, 14', 1'', 358$
$\log b = 6{,}8032061$	$2 \log P = 6{,}90359$	A immer positiv $= +9'',602$
$-\log a = \bar{7}{,}1953846$	$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}68557$	B . . id. . . $= +0'',027$
$\log \text{tang}\,\psi' = 0{,}0644169$	$\log \cos \psi' = \bar{1}{,}81489$	$\psi = 49°, 14', 10'', 987$
$\psi' = 49°, 14', 1'', 358$	$\log \sin \psi' = \bar{1}{,}87932$	$\log \text{tang}\,\psi = 0{,}0644578$
	$\log A = 0{,}98234$	$\log a = 6{,}8046154$
	$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$	$-\log b = \bar{7}{,}1967939$
	$2 \log \cos \psi' = \bar{1}{,}630$	$\log \text{tang}\,l = 0{,}0658671$
	$\log B = \bar{2}{,}426$	$l = 49°, 19', 41'', 906$

Mit Hülfe der Größe l, welche hier die nämliche Bedeutung wie in dem vorhergehenden Paragraphen hat, wird auch t hier wie dort berechnet. Um y zu finden ist folgendes:

$\log b = 6{,}8032061$	A′ ist immer positiv $= +56947{,}1$ Meter.
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$	B′ . . . . id. . . . $= +185{,}4$
$\log P = \bar{3}{,}4517941$	C′ ist immer negativ . . . . . $= -0{,}3$
$\log \cos \psi' = \bar{1}{,}8148965$	D′ . . . . id. . . . . $= -1{,}0$
$\log A' = 4{,}7554716$	Summe $+57132{,}5 \quad -1{,}3$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$	davon . . . . . $1{,}3$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$	$y = 57131{,}2.$
$\log B' = 2{,}26810$	
$-\log 4 = \bar{1}{,}398$	
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$	
$\log C' = \bar{1}{,}480$	
$\log b = \overline{6,\ 803}$	
$3 \log \sin 1'' = \bar{16}{,}057$	
$3 \log P = 10{,}355$	
$\log \cos \psi' = \bar{1}{,}815$	
$2 \log \sin \psi' = \bar{1}{,}759$	
$-\log 6 = \bar{1}{,}222$	
$\log D' = 0{,}011$	

Die Anwendung dieses Werthes von y ist genau die nämliche wie in (245).

Digitized by Google

247) Wenn P größer als 3° ist, so wird das vorhergehende Formular auch mangelhaft. Man muß dann folgenden Gang beobachten, welcher für jedes mögliche P vollkommen genau ist.

Zum Beispiele. (Erläuterung (128, 2).)

$P = 74°, 29', 34'', 75$; $\lambda = 25°, 2', 36'', 47$.

$\log \text{tang}\,\lambda = \bar{1},669\,5321$ $\quad$ $\log \cos\psi' = \bar{1},9573738$

$\log b = 6,8032061$ $\quad$ $\log \sin P = \bar{1},9838958$

$-\log a = \bar{7},1953846$ $\quad$ $\log \sin\xi' = \bar{1},9412696$

$\log \text{tang}\,\psi' = \bar{1},6681228$ $\quad$ $\xi' = 60°, 52', 10'', 34$

$\psi' = 24°, 58', 20'', 04$ $\quad$ oder $= 219130'', 34$

$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$

$\log \xi' = 5,3407025$

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log \text{tang}\,\xi' = 0,2559192$

$-\log \text{tang}\,P = \bar{1},4431947$

$\log \cos\psi' = \bar{1},9573738$

$\log \cos P = \bar{1},4270904$

$-\log \cos\xi' = 0,3126496$

$\log A = 2,2475595$

A ist von dem nämlichen Zeichen wie $\frac{\sin\xi'}{\sin\varphi}$ hier $= +176'',83$

dazu . . . . . $\xi' = 219130,34$

Summe $\xi_1 = 219307,17$

oder $= 60°, 55', 7'', 17$

$\log \sin\psi' = \bar{1},6254966$

$-\log \cos\xi_1 = 0,3133183$

$\log \sin 1'' = \bar{1},9388149$

$1'' = 60°, 17', 42'', 64$ ist immer ein spitziger Winkel.

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log \xi_1 = 5,3410527$

$\log \varepsilon = \bar{3},8136593$

$\log \cos 1'' = \bar{1},6950715$

$\log B = 2,5487535$

B immer positiv $= +353'', 80$

C immer negativ . . . . . $= -1'', 73$

D . . . id. . . . . $= -0'', 22$

F hat d. entgegengef. Z. v. $\sin 2\xi_1 = -0'', 08$

Summe $= +353'', 80 \quad -2'', 03$

davon . . . . . $2'', 03$

Rest $= 351'', 77 = 5', 51'', 77$

dazu $P = \ldots\ldots 74°, 29', 34'', 75$

$u = \ldots\ldots 74°, 35', 26'', 52$

$-\log 4 = \bar{1},39794$

$\log 3 = 0,47712$

$\log \varepsilon = \bar{3},81366$

$\log C = 0,23747$

$-\log 3 = \bar{1},52288$

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$2 \log \sin 1'' = \bar{1},87763$

$\log D = \bar{1},33695$

$-\log \xi_1 = \bar{6},659$

$-\log \sin 1'' = 5,314$

$-\log 2 = \bar{1},699$

$\log \sin 2\xi_1 = \bar{1},929$

$\log F = \bar{2},958$

$\log \cos\psi' = \bar{1},9573738$ $\quad$ $\log \sin\psi' = \bar{1},6254966$

$\log \sin u = \bar{1},9841006$ $\quad$ $-\log \cos\xi = 0,3133101$

$\log \sin\xi = \bar{1},9414744$ $\quad$ $\log \sin 1' = \bar{1},9388068$

$\xi = 60°, 55', 5'', 04$ $\quad$ $1' = 60°, 17', 36'', 03$

oder $= 219305'', 04$

$\log \text{tang}\,1' = 0,2437108$

$\log a = 6,8046154$

$-\log b = \bar{7},1967939$

$\log \text{tang}\,l = 0,2451201$

$l = 60°, 22', 23'', 86$

Digitized by Google

Folgt nun die Berechnung von y.

$\log b = 6{,}803\,2061$	$\log b = 6{,}80321$	$\log b = 6{,}803$
$\log \xi = 5{,}3410485$	$\log \sin 2\xi = \bar{1}{,}92919$	$\log \sin 4\xi = \bar{1}{,}952$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$	$-\log 8 = \bar{1}{,}09691$	$-\log 256 = \bar{3}{,}592$
$\log A' = 6{,}8298295$	$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$	$2\log \varepsilon = \bar{5}{,}327$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	$2\log \sin 1' = \bar{1}{,}87761$	$4\log \sin 1' = \bar{1}{,}755$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$	$\log D' = 3{,}52058$	$\log G' = \bar{1}{,}729$
$2\log \sin 1' = \bar{1}{,}87761$	$-\log 4 = \bar{1}{,}398$	
$\log B' = \bar{3}{,}91904$	$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$	A' immer positiv $= +6758174{,}6$
$\log 3 = 0{,}477$	$2\log \sin 1' = \bar{1}{,}878$	B' . . id. . . $= +\ 8299{,}3$
$-\log 16 = \bar{2}{,}796$	$\log F' = 0{,}610$	C' immer negativ . . . . . $= -7{,}7$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$		D' wie $\sin 2\xi$ $= +\ 3315{,}7$
$2\log \sin 1' = \bar{1}{,}878$		F' ist sin 2ξ entgegengesetzt . $= -4{,}1$
$\log C' = 0{,}884$		G' ist sin 4ξ entg. $= +\ 0{,}6$

l und y werden angewendet wie in (245).

Summe $= +6769790{,}2 \quad -11{,}8$

davon $\quad 11{,}8$

$y = 6769798{,}4.$

248) Bestimmung der Richtung eines Meridianes auf einem Blatte. (Erläuterung (187) letzte Formel.)

Wenn auf dem Blatte $\beta\gamma\delta\varepsilon$ Fig. LXVI. ein Meridian gezogen werden soll, so nehme man in (243) die dem Puncte (9) auf A x zugehörige Breite, welche 48°, 26′, 42″, 81 = 1 ist; dann für diese Breite den log N, welchen man in einer Tabelle wie (232) findet. Man suche ferner die Ordinate des Punctes ε; sie ist $6 \times 5500 = 33000$ und heiße y.

(Wäre das Blatt ein westliches, so müßte man statt des Punctes ε, welcher hier der südöstliche ist, die südwestliche Ecke des Blattes nehmen.)

Man rechne nun:

Digitized by Google

$\log 2y = 4{,}8195439$	$\log \text{tang}\, 1 = 0{,}0523550$	Dieß ρ trage man von δ nach μ und ziehe $\varepsilon\mu$, welche Linie der Meridian von ε seyn wird. Alle übrigen Meridiane auf dem nämlichen Blatte können mit $\varepsilon\mu$ parallel genommen werden.
$-\log N = \bar{1}{,}1945979$	$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$	
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$	$\log \sin 2y'' = \bar{2}{,}0141575$	
$\log 2y'' = 3{,}3285669$	$\log 5500 = 3{,}7403627$	
$2y'' = 2130'', 92$	$\log \rho = 1{,}5058452$	
$= 35', 30'', 92$	$\rho = 32{,}05$ Met.	

249) Wenn zwei Spitzen eines Netzdreieckes projicirt sind, so kann man, ohne die Länge und Breite des dritten Eckpunctes zu kennen, denselben auftragen, indem man den Unterschied zwischen den wirklichen Winkeln des Dreieckes und den Winkeln auf der Charte auf eine ganz ähnliche Weise wie (238) berechnet und benutzt. (Erläuterung (191).)

Es sei z. B. KL (Fig. LXVI.) die schon bestimmte Seite eines Dreieckes, dessen Winkel bekannt sind. Man trage diese Winkel mit dem Transporteur auf, und construire so das vorläufige Dreieck LKm'.

Ziehe sodann mit $\varepsilon\mu$ die Parallele Kn, welche den Meridian von K vorstellt; verlängere auch die Seite LK in Kl' um einen nordöstlichen Azimuth, und einen östlichen Winkel l'Km' zu haben, welcher α heiße.

Im gegenwärtigen Beispiele sei $LKm' = 64°, 28', 20'', 5$, so ist $\alpha = 115°, 31', 39'', 5$. Man messe nun mit dem Transporteur den nordöstlichen Azimuth, welchen derjenige Schenkel des Winkels l'Km' bildet, der dem Meridiane gegen Norden zunächst liegt; hier ist er $l'Kn' = 17°$ und er heiße V. Man hat also $2V = 34°$ und $\alpha + 2V = 149°, 31'$.

Man nehme ferner auch das y des Punctes K, welches entweder schon aus dem Vorhergehenden bekannt ist, oder welches man erhält, indem man den auf dem Blatte befindlichen Theil desselben, nämlich KF nach dem verjüngten Maaßstabe ausmißt und zu der Ordinate des Punctes γ, welche man immer kennt (hier 5 . 5500) addirt.

Man findet im vorliegenden Beispiele $y = 29047$ Met.

Nachdem man nun auch den schon in (248) gebrauchten log N aufgesucht hat, mache man folgende Rechnung:

Digitized by Google

$2 \log y = 8{,}92620$
$-2 \log N = \bar{1}4{,}38920$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log \sin \alpha = \bar{1}{,}63442$
$\log \cos(2V+\alpha) = \bar{1}{,}70511$
$\log C = \bar{1}{,}66833$

C hat das nämliche Zeichen wie $\cos(2V+\alpha)$, also hier $= -0'',47$; diese Größe müßte von α abgezogen werden; aber da α der Nebenwinkel des Winkels im Dreiecke ist, so kann man zu letzterm $-0'',47$ addiren, um seine Projection auf der Charte zu erhalten.

Also: Winkel im Dreiecke 64°, 28′, 20″, 50
wozu . . . . . $-0'', 47$
Projicirter Winkel LKM = 64°, 28′, 20″, 03.

Ebenso läßt sich nun auch der projicirte Winkel KLM finden; sofort können die Seiten des Dreieckes LKM berechnet und demnach das Dreieck selbst aufgetragen werden.

Anmerkung. Man kann auch, wenn die wirklichen Seiten des Dreieckes und ihre genauen Azimuthe bekannt sind, die Coordinaten des dritten Punctes durch die Formeln in (99) oder selbst, wenn die Puncte nahe beim mittleren Meridiane liegen, nach (98) finden; allein die Rechnung ist entweder wenig genau oder weitläufig und dieß Verfahren muß deßhalb dem vorhergehenden weit kürzern und genauern nachgesetzt werden.

250) Wir haben nun alles erschöpft, was der Detail-Aufnahme eines Landes, dessen Charte nach der Projection von Cassini gezeichnet werden soll, vorhergehen muß. Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, wie diejenigen Blätter, in welche die, immer nach einem sehr kleinen Maaßstabe gezeichnete, Gesammtcharte zerfällt, eingerichtet werden müssen.

Diese Blätter enthalten, was den Detail betrifft, nur reduzirte Copien der Aufnahme-Blätter; allein sie sind außerdem mit einem Netze von Meridianen und Parallelkreisen bedeckt, deren Construction in Folgendem gelehrt werden soll.

Der Maaßstab sei wie 1 : 1000000.

Das Papier habe für ein Quadrat von 0,6 Met. Seite hinlänglichen Raum; dann kann jedes Blatt in der Wirklichkeit ein Quadrat von 60000 Meter seyn. Durch diese Kenntniß kann die Figur zur Uebersicht genau wie in (242) construirt, und auch wie dort die Anzahl der Blätter bestimmt werden.

Es steht nun zwar frei, wie weit man die Meridiane und Parallelkreise von einander zeichnen wolle, jedoch ist es nothwendig letztere wenigstens so nahe bei einander

Digitized by Google

zu ziehen, daß der zwischen zwei unmittelbar nach einander folgenden Parallelkreisen liegende Theil eines Meridians als eine gerade Linie betrachtet und gezogen werden könne. Um diesen Zweck zu erreichen mache man folgende Rechnung.

(Erläuterung (188). NB. für y ist der Längenunterschied × cos λ und für sin 2y der Bogen 2y × sin 1″ gesetzt worden. Das zweite Glied ist weggelassen.)

Größte Anzahl Meter, welche nach dem Maaßstabe 1 : 100000 nicht mehr bemerkt werden kann . . . . . 10 Met.

Doppelte größte Länge vom mittleren Meridiane her . . . . . 6° = 21600″

Kleinste Breite auf der Charte . . . . . 48°

log 10 =	1,000	Das Resultat d = 31′ zeigt, daß man die Zwischenräume der Parallelkreise wohl = 30′ nehmen darf. Die der Meridiane sind ganz willkührlich, man nehme sie deshalb auch = 30′. Um die Meridiane und Parallelkreise wirklich zu zeichnen, muß man die Coordinaten ihrer Durchschnitts-Puncte berechnen. Hierzu kennt man die Längen und Breiten dieser Puncte und man kann also ihre Coordinaten nach einer der in (245, 246, 247) gegebenen Methoden finden, mithin die Puncte selbst auf die Blätter auftragen.
— log R =	$\bar{7}$,196	
— 3 log sin 1″ =	15,943	
log 4 =	0,602	
— log 21600″ =	$\bar{5}$,666	
— log cos 48° =	0,175	
2 log d =	6,582	
log d =	3,291	
d = 1860″ = 31′.		

Die Meridiane können wie vorhergesehen als eine Reihe gerader Linien gezogen werden.

Um das Zeichnen der Parallelkreise zu erleichtern, muß man suchen Zwischenpuncte derselben zu bestimmen, welches leicht durch folgende Formulare geschieht. (Erläuterung (185).)

Es sei y die Ordinate eines Punctes eines Parallelkreises;

P seine Länge vom mittleren Meridiane her;

l die Breite des Punctes, wo y der Linie Ax Fig. LXV. begegnet.

Man will die Coordinaten eines andern Punctes bestimmen, der auf dem nämlichen Parallelkreise wie der vorige liegt, aber eine um m Secunden größere Länge vom mittleren Meridiane her hat.

Man nehme den zu l gehörigen log N und rechne:

Digitized by Google

$\log y = \ldots\ldots$	$\log \text{tang } y'' = \ldots\ldots$	$\log \text{tang } y'' = \ldots$
$-\log N = \ldots\ldots$	$\log \cot P = \ldots\ldots$	$\log \text{tang } l = \ldots$
$-\log \sin 1'' = \ldots\ldots$	$\log N = \ldots\ldots$	$\log \Delta y = \ldots$
$\log y'' = \ldots\ldots$	$\log \sin 1'' = \ldots\ldots$	$\log \Delta x = \ldots$
$y'' = \ldots\ldots$	$\log m = \ldots\ldots$	$\Delta x = \ldots$ Met.
	$\log \Delta y = \ldots\ldots$	$\Delta y = \ldots$ Met.

Δy ist der Zuwachs, den die Größe y noch erhalten muß, um die Ordinate des zweiten Punctes zu werden, und Δx ist dasjenige, was man von dem Puncte an, wo y der Linie Ax begegnet, noch auf diese tragen muß, um den Punct zu erhalten, wo die neue Ordinate in Ax eintrifft.

Die so bestimmte Zwischenpuncte können auch benutzt werden um eine größere Menge Meridiane zu zeichnen.

251) Wenn man eine sehr große Anzahl Meridiane und Parallelkreise auf die Charte zeichnen wollte, so bräuchte man doch nur für jeden Parallelkreis die Coordinaten einiger Puncte genau zu berechnen; die andern Puncte könnte man als Zwischenpuncte betrachten, und ihre Coordinaten nach dem vorhergehenden Formulare bestimmen. (Erläuterung (185, 186).)

Siebentes Kapitel.

Construction einer Seecharte. ((192) und folgende.)

252) Die Seecharten stellen immer sehr große Theile der Erdoberfläche, meistens Hemisphären, auch wohl die ganze Kugel dar.

Die Hauptsache bei der Construction derselben ist die Verzeichnung des Netzes der Meridiane und Parallelkreise, in welches alle nöthige Puncte nach ihren gegebenen Längen und Breiten aufgetragen werden. Die Umrisse der Länder werden von andern in größerem Maaßstabe gezeichneten Charten, auf welchen sich ebenfalls Netze von Meridianen und Parallelkreisen befinden, copirt, indem man sich wie gewöhnlich der in diesen Netzen befindlichen einander entsprechenden Vierecke bedient.

Das Netz einer Seecharte erhält man, wie folgt:

Digitized by Google

Man ziehe Fig. LXVII. die gerade Linie AB, welche den Equator bedeutet; bestimme dann wie weit die Meridiane von einander gezogen werden sollen; es sei dieses z. B. $5^0 = 180000''$. Man rechne:

$\log 180000 = 4{,}2552725$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$
$\log a = 6{,}8046154$
$\log D = 5{,}7454628$
$D = 556497$ M.

Die Größe D trage man in AC, CD, DE, EF...., und errichte in den Puncten A, C, D, E, F, B,.... Perpendikel, welche die Meridiane vorstellen.

Soll nun ein Parallelkreis gezogen werden, so verfahre man wie in dem folgenden Beispiele:

Den Parallelkreis von 30° nördlicher oder südlicher Breite zu zeichnen.

Rechnung.

Breite des Parallelkreises ..... $\lambda = 30°$

Also ..... $\frac{90° + \lambda}{2} = 60°$

$\log \text{tang } 60° = 0{,}2385606 = T.$

Ferner:

$\log T = \bar{1}{,}3775937$
$\log a = 6{,}8046154$
$-\log K = 0{,}3622157$
$\log A = 6{,}5444298$
$\log a = 6{,}80462$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$
$\log \sin \lambda = \bar{1}{,}69897$
$\log B = 4{,}31443$
$\log e^2 = \bar{5}{,}811$
$-\log 3 = \bar{1}{,}523$
$2 \log \sin \lambda = \bar{1}{,}398$
$\log C = 1{,}046$

A ist immer positiv .. = 3502917
B negativ = — 20627
C id. = — 11
Summe — 20638 + 3502917
Davon 20638
Bleibt H = 3482279 Met.

Diese Größe trage man von D nach H und ziehe durch H mit AB die Parallele NP, welche der verlangte Parallelkreis seyn wird.

Digitized by Google

Achtes Kapitel.

Höhenmessungen.

253) Reduction der Zenithaldistanzen auf den Gipfel des Signals.

Zum Beispiele. (Erläuterung (197) Note.)

17 Meter tiefer als das Signal A wurde die Zenithaldistanz von B gemessen und gleich 90°, 13′, 00″, 192 gefunden.

15,1 Meter tiefer als das Signal B wurde die Zenithaldistanz von A gemessen, sie betrug 89°, 55′, 59″, 88.

Die Entfernung A B ist 28504,75 Met. = D.

Man soll die Zenithaldistanzen auf die Gipfel der Signale reduziren.

h = 17	h = 15,1
D = 28504	D = 28504
δ′ = 90°, 13′, 00″, 192	δ′ = 89°, 55′, 59″, 88.
log h = 1,23045	log h = 1,17898
— log D = $\bar{5}$,54508	— log D = $\bar{5}$,54508
2 log sin δ′ = $\bar{1}$,99999	2 log sin δ′ = $\bar{1}$,99999
— log sin 1″ = 5,31443	— log sin 1″ = 5,31443
log corr. = 2,08995	log corr. = 2,03848
corr. = 123″, 01 = 2′, 3″, 01	corr. = 109″, 26 = 1′, 49″, 26
δ′ = ... 90°, 13′, 00″, 19	δ′ = ... 89°, 55′, 59″, 88
Θ_1 = ... 90°, 15′, 3″, 2	Θ_2 = ... 89°, 57′, 49″, 14

Θ_1 und Θ_2 sind die gesuchten Zenithaldistanzen.

254) Bestimmung des Refractions-Coefficienten (199).

Hierzu muß man die Entfernung zweier Puncte und ihre wechselseitige Zenithaldistanzen kennen. Nehmen wir das Beispiel des vorigen Paragraphen, so ist die Rechnung folgende:

Entfernung	D = 28504,75 Meter.
1te Zenithaldistanz	Θ_1 = 90°, 15′, 3″, 2
2te ... id. ...	Θ_2 = 89°, 57′, 49″, 14
$\Theta_1 + \Theta_2 - 180°$	= .... 12′, 52″, 34.

Digitized by Google

$\log D = 4{,}4549172$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$
$\log C = 2{,}9654622$
$C = 923'',554 = 15', 23'', 554$
$\Theta_{,} + \Theta_{2} - 180° \ldots = 12', 52'', 34$
Rest $= 2', 31'', 214$
Davon die Hälfte $r = 75'', 607$

$\log r = 1{,}87856$
$-\log C = \bar{3}{,}03454$
$\log n = \bar{2}{,}91310$
$n = 0{,}08185 \ldots$. Dieß n ist der gesuchte Refractions-Coeffizient.

255) Eine Zenithaldistanz von der Refraction zu corrigiren (199).

Wenn, wie im vorhergehenden Beispiele, wechselseitige Zenithaldistanzen gemessen worden sind, so kann man beide von der Refraction corrigiren, indem man die Größe r, welche so wie (254) berechnet wird, zu jeder addirt, nämlich:

$\Theta_{,} = 90°, 15', 3'', 2$ $\quad$ $\Theta_{2} = 89°, 57', 49'', 14$
$r = 1', 15'', 607$ $\quad$ $r = 1', 15'', 607$
$\delta_{,} = 90°, 16', 18'', 807$ $\quad$ $\delta_{2} = 89°, 59', 4'', 747$

$\delta_{,}$ und δ_{2} sind die corrigirten Zenithaldistanzen.

Wenn aber von $\Theta_{,}$ und Θ_{2} nur eine, z. B. $\Theta_{,}$ bekannt wäre, so müßte zuerst durch vielfältige anderwärtige Beobachtungen und deren Berechnungen nach (254) ein möglichst zuverlässiger mittlerer Werth des Refractions-Coeffizienten bestimmt worden seyn. Ist dieser gegeben z. B. $n = 0{,}08185$, und kennt man auch die Entfernung $AB = 28504$ Meter $= D$, so ist folgende Rechnung zu machen, um $\Theta_{,}$ von der Refraction zu befreien

$\log n = \bar{2}{,}91310$
$\log D = 4{,}45492$
$-\log R = \bar{7}{,}19612$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log \text{corr.} = 1{,}87857$

corr. $= \ldots 1', 15'', 607$
$\Theta_{,} = 90°, 15', 3'', 2$
$\delta_{,} = 90°, 16', 18'', 807$

256) Die Höhe von A über B zu finden, wenn die Entfernung AB und die wechselseitigen Zenithaldistanzen der Puncte A und B gegeben sind. (199)

In diesem Falle brauchen die Zenithaldistanzen nicht von der Refraction corrigirt zu werden; die Rechnung ist folgende:

Digitized by Google

$\Theta_1 = 90°, 15', 3'', 20$
$\Theta_2 = 89°, 57', 49'', 14$
$\Theta_1 - \Theta_2 = 0°, 17', 14'', 06$
$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} = 0°, 8', 37'', 03$

$D = 28504{,}75$ Met.
$\log D = 4{,}4549172$
$\log \text{tang}\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}\right) = \bar{3}{,}3990915$
$\log$ 1tes Gl. $= 1{,}8540087$
idem $= 1{,}8540087$
$-\log R = \bar{7}{,}19612$
$\log$ 2tes Gl. $= \bar{4}{,}90414$

Met.
1tes Gl. $= 71{,}45107$
dazu 2tes Gl. $= 0{,}00080$
Höhe $= 71{,}452$

257) Wenn man, wie eben, wechselseitige Zenithaldistanzen gemessen hat, und der Refractionscoeffizient ist schon früher bestimmt worden, so kann man ohne die Entfernung AB zu kennen, doch die Höhe von A über B ohngefähr bestimmen wie folgt: (200)

$\Theta_1 = 90°, 15', 3'', 20$
$\Theta_2 = 89°, 57', 49'', 14$
$\Theta_1 + \Theta_2 - 180° = 12', 52'', 34 = 772'', 34$. Diese Größe wird mit dem Refractions-Coeffizienten . . . . . 0, 0818 multiplizirt und dann das Product . . . . . $63'', 1774$ zweimal zu $\Theta_1 + \Theta_2 - 180°$ addirt, welches die Summe . . . . . $898'', 69$ giebt. Diese wieder mit dem Refractions-Coeffizienten . . . . . 0, 0818 multiplicirt giebt ein Product . . . . . $73'', 51 = 1', 13'', 51$, welches zu jedem Θ addirt werden muß, um ohngefähre Werthe von δ_1 und δ_2 zu erhalten, welche demnach:

$\delta_1 = 90°, 16', 16'', 71$; $\delta_2 = 89°, 59', 2'', 65$ seyn werden.

Hieraus zieht man $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = 90°, 7', 39'', 68$, $\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = 0°, 8', 57'', 03$.

Digitized by Google

Rechnung.

$\log 2 = 0{,}30103$
$\log R = 6{,}80488$
$-\log \sin \delta_1 = 0{,}00000$
$\log \sin \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = \bar{3}{,}39907$
$\log \cos \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) = \bar{3}{,}34853$
$\log \text{Höhe} = 1{,}85351$

Höhe = 71,37 Meter.
Man sieht, daß dieser Werth schon in der dritten Ziffer unrichtig ist, so daß die gegenwärtige Methode nur als eine Annäherung betrachtet werden darf.

258) Mit den nämlichen gegebenen Dingen wie vorhin läßt sich auch die Entfernung A B angenäherter Weise bestimmen.

Man berechne so wie oben die Größe 1′, 13″, 51; addire sie zweimal zu $\Theta_1 + \frac{\Theta}{2} - 180°$; die Summe wird 919″, 36.

Nun rechne man:

$\log (919{,}36) = 2{,}9634856$
$\log \sin 1'' = \bar{6}{,}6855749$
$\log R = 6{,}8038801$
$\log D = 4{,}4529406$

D = 28375 Met., welcher Werth auch schon in der dritten Ziffer unrichtig ist.

259) Wenn man nur eine, aber eine von der Refraction corrigirte Zenithaldistanz und die Entfernung der Puncte A, B hat, so kann man die Höhe von A über B genau finden. (Erläuterung (197).)

Z. B. Zenithaldistanz $\delta_1 = 90°, 16', 18'', 807.$
Entfernung A B = D = 28504,75 Meter.

Rechnung.

$\log D = 4{,}4549172$
$\log \cot \delta_1 = \bar{3}{,}6762751$
$\log$ 1tes Gl. $= 2{,}1311923$
idem $= 2{,}1311923$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$
$\log$ 2tes Gl. $= \bar{3}{,}4585045$

$2 \log D = 8{,}9098344$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$
$\log$ 3tes Gl. $= 1{,}8049243$

Digitized by Google

1tes Glied immer positiv $= +\ 135{,}267$
2tes Glied wie cot δ_1 . . . . . $= -\ 0{,}003$
3tes Glied idem . . . . . $= -\ 63{,}815$
Summe $= +\ 135{,}267 \quad -\ 63{,}818$
Davon . . . . $63{,}818$
Höhe $= \quad 71{,}449$; diese ist von der früheren erst in der 5ten Ziffer verschieden.

260) Wenn die Höhe von A über B einmal bekannt ist, und man hat zwei Zenithaldistanzen in A und B gemessen, so kann man die Entfernung AB ohne Kenntniß der Refraction finden, wie folgt. (Erläuterung (209).)

Die Höhe sei $h = 71{,}452$ Meter.

Die Zenithaldistanzen $\begin{cases} \Theta_1 = 90^0,\ 15',\ 3'',\ 20 \\ \Theta_2 = 89^0,\ 57',\ 49'',\ 14 \end{cases}$

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} = 0^0,\ 8',\ 37'',\ 03.$$

$\log h = 1{,}8540144$
$-\log \tan\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}\right) = 2{,}6009085$
$\log$ 1tes Gl. $= 4{,}4549229$
$\log h = 1{,}8540144$
$-\log R = \bar{7}{,}1961199$
$\log$ 2tes Gl. $= \bar{1}{,}5050572$

1tes Glied $= +\ 28505{,}13$
2tes Glied $= -\ 0{,}32$
Entfernung $= \quad 28504{,}81.$

261) Es ist genauer, wenn man in allen vorhergehenden Rechnungen, statt des mittleren Werthes des Erde-Radius, die Größe N, welche man für die Breite des einen der beiden Puncte A oder B nach (232) findet, gebraucht.

Will man sich durchaus keine Vernachlässigung zu Schulden kommen lassen, so muß man nach (201) verfahren, welches jedoch nur für sehr große Höhen nothwendig ist. Die Rechnung wird dann geführt wie in folgendem Beispiele:

Bekannt müssen seyn:

Die Höhe des tiefern Punctes über der Meeresfläche . . $h = 240$ Met.
Die Breite des obern Punctes . . . . . $L = 50^0,\ 29',\ 23'',\ 818$
Die Breite des tiefern Punctes . . . . . $\lambda = 50^0,\ 16',\ 32'',\ 5$
Die am untern Puncte gemessene und von der Refraction corrigirte Zenithaldistanz . . . . . $\delta = 89^0,\ 10',\ 54'',\ 33$

Digitized by Google

Rechnung.

$\log a = 6{,}8046154$	$\log a = 6{,}8046154$	$D' = 31888{,}949$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$	$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$	$D = 31790{,}022$
$\log e^2 = \bar{3}{,}8108439$	$\log e^2 = \bar{3}{,}8108439$	Rest $c = 98{,}927$
$2\log\sin\lambda = \bar{1}{,}7719978$	$2\log\sin L = \bar{1}{,}7746864$	$\log c = 1{,}9953148$
$\log A = 4{,}0864271$	$\log A' = 4{,}0891157$	$\log\sin\lambda = \bar{1}{,}8859989$
$\log 3 = 0{,}47712$	$\log 3 = 0{,}47712$	$\log A'' = 1{,}8813137$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	$A'' = 76{,}087$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	$N + h = 6389460{,}90$
$2\log\sin\lambda = \bar{1}{,}77200$	$2\log\sin L = \bar{1}{,}77469$	$N_{,} = 6389536{,}987$
$\log B = 1{,}54433$	$\log B' = 1{,}54971$	$N' + h = 6389537{,}13$
$A = 12201{,}88$	$A' = 12277{,}67$	Unterschied $d = \ldots\ldots 0{,}14$ M.
$B = 35{,}02$	$B' = 35{,}46$	$-\log\sin 1'' = 5{,}31443$
$a = 6376984{,}00$	$a = 6376984$	$\log c = 1{,}99531$
Summe $N = 6389220{,}90$	Summe $N' = 6389297{,}13$	$\log\cos\lambda = \bar{1}{,}80556$
$h = \ldots 240$	$h = 240$	$-\log N_{,} = \bar{7}{,}19443$
$N + h = 6389460{,}90$	$N' + h = 6389537{,}13$	$\log I = 0{,}30983$
$\log N = 6{,}8054480$	$\log N' = 6{,}8054531$	$I = 2'', 04$
$\log e^2 = \bar{3}{,}8108439$	$\log e^2 = \bar{3}{,}8108439$	$\lambda = 50°,16',32'',5$
$\log\sin\lambda = \bar{1}{,}8859989$	$\log\sin L = \bar{1}{,}8873432$	$\lambda + I = 50°,16',34'',54$
$\log D = 4{,}5022908$	$\log D' = 4{,}5056402$	$L = 50°,29',23'',818$
$D = 31790{,}022$	$D' = 31888{,}949$	$\frac{L-\lambda-I}{2} = 0°, 6',24'',639$

$\log\cos L = \bar{1}{,}8036029$	$\log\sin\left(\frac{L-\lambda-I}{2}\right) = \bar{3}{,}2706276$
$\log\cos(\lambda + I) = \bar{1}{,}8055597$	$-\log\cos\Theta = 0{,}0780018$
$2\log\sin\frac{P}{2} = \bar{6}{,}5677772$	$\log\sin\frac{a'}{2} = \bar{3}{,}3486294$
$-2\log\sin\left(\frac{L-\lambda-I}{2}\right) = 5{,}4587448$	$\frac{a'}{2} = 7', 40'', 315$; $a' = 15', 20'', 63$
$2\log\tan\Theta = \bar{1}{,}6356846$	
$\log\tan\Theta = \bar{1}{,}8178423$	

$\frac{a'}{2}$ ist immer ein spitziger Winkel.

Digitized by Google

$\log \sin P = \bar{3},5849181$
$\log \cos L = \bar{1},8036029$
$-\log \sin a' = 2,3503415$
$\log \sin \gamma = \bar{1},7388625$
$\gamma = 33°, 14', 13'', 17$

Um zu wissen ob γ spitzig oder stumpf genommen werden muß, braucht man nur zu untersuchen ob $\frac{\text{tang } L}{\cos P} >$ oder $<$ tang $(\lambda + I)$ ist. Im ersten Falle, welcher hier Statt hat, ist γ spitzig, im zweiten stumpf.

$\log I = 0,3097184$
$\log \cos \gamma = \bar{1},9224195$
$\log u = 0,2321379$
$u = \ldots 1'', 707$
$\delta = 89°, 10', 54'', 330$
$t = 89°, 10', 52'', 623$

u hat das Zeichen von cos γ und wird von δ abgezogen.

$\frac{a'}{2} = \ldots. 7', 40'', 315$
$t - \frac{a'}{2} = 89°, 3', 12'', 31$
$t - a' = 88°, 55', 31'', 99$

$\log 2 = 0,3010300$
$\log N_{,} = 6,8054694$
$\log \cos\left(t - \frac{a'}{2}\right) = \bar{2},2180152$
$\log \sin \frac{a'}{2} = \bar{3},3486247$
$-\log \sin(t - a') = 0,0000763$
$\log H' = 2,6732156$

Met.
$H' = 471,212$
$d = 0,14$
$H' - d =$ oder wahre Höhe
Met.
$H = 471,07.$

262) Wenn in irgend einem Standpuncte ein Beobachter die Zenithaldistanz des Meerhorizontes genommen hat, so kann man die Höhe des Standpunctes über der Meeresfläche bestimmen, wenn der Refractions-Coeffizient bekannt ist. (Erläuterung (203).)

Zum Beispiele.

Die Zenithaldistanz sei $\Theta = 90°, 58', 9''$
Der Refractions-Coeffizient $n = 0,08$, so ist
$\Theta - 90° = 58', 9'' = 3489''$; $1 - n = 0,92$; man rechne nun

Digitized by Google

$$
\left.\begin{aligned}
2\log(\Theta-90^0) &= 7{,}0854020\\
-\log 2 &= \bar{1}{,}6989700\\
-2\log(1-n) &= \bar{1}{,}9275756\\
\log R &= 6{,}8038801\\
2\log\sin 1'' &= \bar{1}\bar{1}{,}3711498\\
\log \text{Höhe} &= 3{,}0869775
\end{aligned}\right\} \text{Höhe} = 1222 \text{ Meter.}
$$

263) Um eine Höhe mit dem Barometer zu messen, sind die in folgendem Beispiele angegebenen Data der Beobachtungen und die darauf folgende Rechnung nothwendig. (Erläuterung (204) und folgende.)

Das Beispiel ist aus den von Herrn von Humboldt zur Bestimmung der Höhe des Chimborazo über der Südsee gemachten Beobachtungen entnommen.

Barometer.		Hunderttheiliger Thermometer.	
Oberer Standpunct	167,2 Linien = h′	im Barometer	10 Grad = T′
		in der Luft ..	— 1,6 . = Θ′
Unterer Standpunct	337,7 Linien = h	im Barometer	25,3 Grad = T
		in der Luft ..	25,3 . . . = Θ.

Breite des Chimborazo $1^0{,}45' = \lambda$.

NB. Es ist willkührlich, in welchem Maaße die Barometerstände ausgedrückt sind, aber unser Formular unterstellt, daß die Grade der Temperatur auf einem hunderttheiligen Thermometer beobachtet, oder, wenn dieses nicht geschehen, auf hunderttheilige Grade reduzirt worden seyen. Was das Verfahren bei den Beobachtungen selbst betrifft, hat man auf (208) Rücksicht zu nehmen.

Rechnung. (Erläuterung (206).)

$$
\left.\begin{aligned}
\log\cos 2\lambda &= \bar{1}{,}9994011\\
\log 0{,}002837 &= \bar{3}{,}4528593\\
\log m &= \bar{3}{,}4522604\\
m &= 0{,}002833\\
1+m &= 1{,}002833\\
\log(1+m) &= \overline{0{,}0012286}\\
\log 18336 &= 4{,}2633046\\
\log \text{Coeffizient} &= \overline{4{,}2645332}
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\Theta &= 25{,}3\\
\Theta' &= -\ 1{,}6\\
\Theta+\Theta' &= 23{,}7\\
1+\frac{2(\Theta+\Theta')}{1000} &= 1{,}0474\\
T &= 25{,}3\\
T' &= 10\\
T-T' &= 15{,}3\\
5412 &= 5412\\
5412-(T-T') &= 3396{,}7
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\log(5412-(T-T') &= 3{,}7321283\\
\log h &= 2{,}5285311\\
-\log h' &= \bar{3}{,}7767637\\
-\log 5412 &= \overline{4{,}2666422}\\
M &= \overline{0{,}3040653}\\
\log \text{Coeffizient} &= \overline{2{,}2645332}\\
\log\left(1+\frac{2(\Theta+\Theta')}{1000}\right) &= 0{,}0201126\\
\log M &= \bar{1}{,}4829669\\
\log H' &= \overline{3{,}7676127}
\end{aligned}\right\}
$$

Digitized by Google

$\log H' = 3{,}76761$
$-\log R = \bar{7}{,}19612$
Summe $\log p = \bar{4}{,}96373$
$p = 0{,}00091988$
$1 + p = 1{,}00091988$

$M = 0{,}3040653$
$2\log(1+p) = 0{,}0007916$
$M' = 0{,}3048569$

$\log \text{Coeffiz.} = 4{,}2645332$
$\log\left(1+\frac{2(\Theta+\Theta')}{1000}\right) = 0{,}0201126$
$\log M' = \bar{1}{,}4840961$
$\log(1+p) = 0{,}0003958$
$\log H = 3{,}76913377$
$H = 5876{,}76$

welche die gesuchte Höhe ist.

264) Wenn die Höhe nicht sehr beträchtlich gewesen wäre, so hätte die Rechnung kürzer geführt werden können, wie folgt:

Zum Beispiele. (Erläuterung (207).)

Man behalte die nämlichen Data wie im vorhergehenden §.

Rechnung.

$\log\cos 2\lambda = 1{,}9994011$
$\log 0{,}002837 = \bar{3}{,}4528593$
$\log m = \bar{3}{,}4522604$
$m = 0{,}002833$
$1 + m = 1{,}002833$
$\log(1+m) = 0{,}0012286$
$\log(18393) = 4{,}2646526$
$\log \text{Coeffizient} = 4{,}2658812$

$\log(5412 - (T - T')) = 3{,}7321285$
$\log h = 2{,}5285311$
$-\log h' = \bar{3}{,}7767637$
$-\log 5412 = \bar{4}{,}2666422$
$M = 0{,}3040653$
$\log\left(1+\frac{2(\Theta+\Theta')}{1000}\right) = 0{,}0201126$
$\log \text{Coeffizient} = 4{,}2658812$
$\log M = \bar{1}{,}4829669$
$\log H = 3{,}7689607$

Gesuchte Höhe $H = 5874{,}46$ Meter. Diese ist von dem wahren Werthe nur in der 4ten Ziffer verschieden.

265) Wenn man die Paragraphen (264), (263) und (260) in Verbindung setzt, so sieht man, wie das Barometer gebraucht werden kann, um die Entfernung zweier Puncte zu messen.

Eine große Genauigkeit ist dabei freilich nicht zu erwarten, weil die Unvollkommenheiten der mit dem Barometer gemessenen Höhen groß genug sind, um in der Rechnung (260) einen bedeutenden Einfluß auszuüben.

Digitized by Google

Neuntes Kapitel.

Auflösung einiger besondern geodätischen Aufgaben.

266) Wenn die Breiten der Endpuncte eines Meridianbogens gegeben sind, den Bogen selbst zu berechnen. (Erläuterung (104).)

Man befolge nachstehendes Formular:

Gegeben { größere Breite $l = 60°, 22', 23'', 86$. Bekannt ist
kleinere Breite $L = 45°, 13', 15'', 4$ $\log e^2 = \bar{3},8108439$.

$l + L = 105°, 35', 39'', 26$

$l - L = 15°, 9', 8'', 46 = 54548'', 46$

$2(l + L) = 211°, 11', 18'', 52$

$2(l - L) = 30°, 18', 16'', 92$

$\log a = 6,8046154$	$\log a = 6,80461$	$\log 15 = 1,17609$
$\log (l - L) = 4,7367825$	$\log 3 = 0,47712$	$-\log (128) = \bar{3},89279$
$\log \sin 1'' = \bar{6},6855749$	$-\log 4 = \bar{1},39794$	$\log \sin 2(l - L) = \bar{1},70294$
$\log A = 6,2269728$	$\log \sin (l - L) = \bar{1},41728$	$\log \cos 2(l + L) = \bar{1},93221$
$\log e^2 = \bar{3},81084$	$\log \cos (l + L) = \bar{1},98371$	$\log a = 6,80461$
$-\log 4 = \bar{1},39794$	$\log e^2 = \bar{3},81084$	$2 \log e^2 = \bar{5},62168$
$\log B = \bar{3},43575$	$\log D = 2,89150$	$\log G = 1,13032$
$\log 3 = 0,47712$	$-\log 4 = \bar{1},39794$	
$\log e^2 = \bar{3},81084$	$\log e^2 = \bar{3},81084$	
$-\log 16 = \bar{2},79588$	$\log F = 1,10028$	
$\log C = 0,51959$		

	Meter.
A ist immer positiv . . . . . =	1686447,4
B immer negativ . . . . . =	− 2727,4
C . . . idem . . . . . =	− 3,3
D hat das entgegengef. Zeichen von $\cos (l + L)$ =	+ 7789,4
F . . . . . idem . . . . . =	+ 12,6
G hat das Zeichen von $\cos 2(l + L)$ . . . . . =	− 13,5
Summe =	1694249,4 = − 2744,2
Hiervon =	− 2744,2
Bleibt =	1691505,2 Meter,

welches die Länge des gesuchten Meridianbogens ist.

Digitized by Google

Anmerkung. Wenn der zu findende Meridianbogen sehr klein ist, so verfahre man mit den Breiten seiner Endpuncte, wie man in (245) mit l und λ rechnete um t zu finden.

Das Formular ist also:

Größere Breite = 48°, 29′, 22″, 66 = l
Kleinere Breite = 48°, 26′, 42″, 81 = λ
Unterschied = ... 159″, 85 = Δ in Secunden.

		Meter.
log Δ = 2,2037126	u ist immer positiv . . . . . =	4942,02
log const. = 1,4901903	v ist immer negativ . . . . . = ...	—7,99
log u = 3,6939029	w hat d. entgegengef. Z. v. cos 2l = . .	2,91
log const. = $\bar{3}$,20878	Summe =	4944,95 = —7,99
log v = 0,90268	Hiervon = . .	7,99
log 3 = 0,47712	Bleibt der Meridianbogen =	4936,94 Meter.
log cos 2l = $\bar{1}$,08456		
log w = 0,46436		

267) Wenn die Größe eines Meridianbogens und die Breite des einen seiner Endpuncte gegeben sind, die Breite des andern Endpunctes zu finden. (Erläuterung (128, 1.))

Gegeben.

Länge des Bogens . . . T = 1691505,2 Meter.
Breite des einen Endpunctes . . . L = 45°, 13′, 15″, 4

Rechnung.

log T = 6,2282733	A = 54712″,05 = 15°, 11′, 52″, 05
— log a = $\bar{7}$,1953846	2 L = 90°, 26′, 30″, 8
— log sin 1″ = 5,3144251	2L + A = 105°, 38′, 22″, 85.
log A = 4,7380830	NB. A wird hier zu 2L addirt, weil L die kleinere
— log 4 = $\bar{2}$,39794	Breite seyn soll. Wenn die größere Breite gegeben
log e² = $\bar{3}$,81084	wäre, so müßte es hier heißen 2L — A, und ebenso
log B = 1,94686	in allem Folgenden.

Digitized by Google

$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$	A immer positiv . . . . . $= 54712'',05$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	B . . . . id. . . . . $= 88{,}48$
$\log 3 = 0{,}47712$	C hat das Z. v. $\cos(2L+A)$ . . . . . $= -252{,}63$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	Summen $= 54801'',53 = -252{,}63$
$\log \sin A = \bar{1}{,}41855$	Hiervon $252{,}63$
$\log \cos(2L+A) = \bar{1}{,}98361$	Bleibt $\Delta' = 5454[illegible]90$
$\log C = 2{,}40249$	$2L = 90°, 26', 30'', 8$
	$2L + \Delta' = 105°, 35', 39'', 7$

NB. Im nämlichen Falle wo statt $2L + A$, $2L - A$ gesetzt werden müßte, muß auch hier und in Folgendem für $2L + \Delta'$, $2L - \Delta'$ geschrieben werden.

$\log \Delta' = 4{,}73678$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$	$\log 15 = 1{,}17609$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	$\log 3 = 0{,}47712$	$-\log 128 = \bar{3}{,}89279$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log B' = 1{,}94556$	$\log \sin \Delta' = \bar{1}{,}41728$	$\log \sin 2\Delta' = \bar{1}{,}70294$
$\log 3 = 0{,}47712$	$\log \cos(2L+\Delta') = \bar{1}{,}98371$	$\log \cos 2(2L+\Delta') = \bar{1}{,}93221$
$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	$2 \log e^2 = \bar{5}{,}62168$
$-\log 16 = \bar{2}{,}79588$	$\log D' = 2{,}40132$	$\log G' = \bar{1}{,}64014$
$\log C' = \bar{1}{,}02940$	$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$	
	$\log e^2 = \bar{3}{,}81084$	
	$\log F' = \bar{1}{,}61010$	

A (wie oben) immer positiv . . . . . $= 54712'', 05$

B' . . . idem . . . . . $= 88{,}22$

C' . . . idem . . . . . $= 0{,}11$

D' hat das Zeichen von $\cos(2L+\Delta')$ . . . . . $= -251'', 95$

F' . . . . idem . . . . . $= -0{,}41$

G' hat d. entgeg. Z. v. $\cos 2(2L+\Delta')$ $= 0{,}44$

Summen $= 54800'', 82 = -252{,}36$

Hiervon $= 252{,}36$

Bleibt $54548'', 46 = \Delta$. Dieses Δ muß zu L addirt, oder, wenn L die größere Breite ist, von L subtrahirt werden, um die gesuchte Breite des andern Endpunctes zu erhalten.

Digitized by Google

Anmerkung. Wenn der Breiten-Unterschied Δ nicht allzu bedeutend ist, so kann man schon Δ' für das wahre Δ nehmen, und so den größten Theil der vorhergehenden Rechnung vermeiden.

268) Wenn die Breite eines Punctes A und seine Länge von B her gegeben sind, die Größe der Perpendiculäre, welche von A aus nach dem Meridiane von B geht, und die Breite des Fußes dieser Perpendiculäre zu finden.

Man nenne P die Länge des Punctes A von B her.

λ seine Breite.

l die Breite des Fußes der Perpendiculäre.

y die Perpendiculäre selbst.

Dann wird hier genau die Rechnung gemacht, wodurch in den Paragraphen (245, 246, 247) aus P und λ die Größen l und y gefunden wurden.

269) Wenn die Entfernungen eines Punctes A von dem Meridiane und der Perpendiculäre des Punctes B, ferner die Breite von B, bekannt sind, die Breite von A und den Längenunterschied von A und B zu berechnen.

Gegeben.

Die Breite von B ... $L = 48°, 50', 13'', 5$.

Die Entfernung des Punctes A von dem Meridiane von B ... $S = 28566$ Met.

Die Entfernung des Punktes A von der Perpendiculäre von B ... $T = 54399$ Met.

Man weiß auch, daß T vom Equator gegen den Pol hin getragen werden muß.

T ist ein Meridianbogen, dessen einer Endpunct B ist, und man weiß, daß die Breite von B die kleinere ist; man kann also nach (267) die Breite des andern Endpunctes, welcher der Fuß der Perpendiculäre ist, die von A nach dem Meridiane von B geht, berechnen. Man nenne diese Breite l.

Hier findet man $l = 49°, 19', 34'', 7$.

Die Rechnung um den Längen-Unterschied von A und B und die Breite von A zu bestimmen ist nun folgende: (Erläuterung (134, 1.)

Digitized by Google

$\log \text{tang } l = 0{,}0658364$
$\log b = 6{,}8032061$
$-\log a = \bar{7}{,}1953846$
$\log \text{tang } \psi = 0{,}0644271$
$\psi = 49°, 14', 3'', 765$
$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$2 \log \sigma = \bar{5}{,}30529$
$\log \text{tang } \psi = 0{,}06443$
$\log \Lambda' = 0{,}38312$
$\log \varepsilon = \bar{3}\ 81366$
$2 \log \sin \psi = \bar{1}{,}75864$
$\log B' = \bar{3}{,}95542$

$\log S = 4{,}4558494$
$-\log b = \bar{7}{,}1967939$
$\log \sigma = \bar{3}{,}6526433$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144251$
$\log \sigma = \bar{3}.6526433$
$-\log \cos \psi = 0{,}1851093$
$\log C' = \bar{3}{,}1521777$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$\log D' = 0{,}66481$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$
$\log 3 = 0{,}477$
$-\log 4 = \bar{1}{,}398$
$\log F' = \bar{2}{,}351$

$-\log \sin 1'' = 5{,}314$
$3 \log \sigma = \bar{8}{,}959$
$2 \log \text{tang } \psi = 0{,}129$
$-\log 3 = \bar{1}{,}523$
$-\log \cos \psi = 0{,}185$
$\log G' = \bar{2}{,}109$

A' ist immer negativ . . . . . $= -2'',416$
B' immer positiv $= +0'', 009$
Summen $= +0'', 009 = -2'', 416$
Hiervon . . . $2'', 416$
Bleibt $-2'', 407$
Hierzu $\psi = 49°, 14', 3'', 765$
$\psi' = 49°, 14', 1'', 358$
$\log \text{tang } \psi' = 0{,}0644169$
$\log a = 6{,}8046154$
$-\log b = \bar{7}{,}1967939$
$\log \text{tang } \lambda = 0{,}0658262$
$\lambda = 49°, 19', 32'', 302$
welche die gesuchte Breite von A ist.

C' immer positiv $= 1419'', 638$
D' immer negativ . . . . . $= -4'', 622$
F' immer positiv $= 0'', 022$
G' immer negativ . . . . . $= -0'', 013$
Summen $= 1419'', 660 = -4'', 635$
Hiervon . . . . . $4{,}635$
Bleibt $23', 35''; 025$
welches der gesuchte Längenunterschied ist.

270 Wenn die gegebenen Entfernungen von dem Meridiane und der Perpendiculäre nicht grösser sind als 30000 Meter, so kann man die Aufgabe des vorigen Paragraphen

Digitized by Google

kürzer auflösen, wie folgt: erstens suche man die Breite des Fußes der Perpendiculäre nach (267), indem man blos Δ' berechnet, wie in der dortigen Anmerkung gesagt ist. Hat man diese Breite l gefunden, so findet man die Breite von A und den Längenunterschied von A und B auf folgende Art: (Erläuterung (114).)

Gegeben $\begin{cases} S = 28566 \\ T = 54399 \\ L = 48^0, 50', 13'', 5 \end{cases}$

NB. Wir haben hier das vorige Beispiel beibehalten, obgleich $T > 30000$ Meter ist. Dieß thut nichts zur Sache, wo es nur darauf ankömmt das Verfahren zu zeigen.

Man fand auf dem Wege wie oben gesagt $l = 49°, 19', 34'', 751$.

Rechnung.

$\log k = \bar{1},63777$	$2 \log S = 8,91170$	$\log S = 4,4558494$
$\log e^2 = \bar{3},81084$	$-2 \log N = \bar{1}4,38915$	$-\log N = \bar{7},1945766$
$-\log 2 = \bar{1},69897$	$\log \text{tang } l = 0,06584$	$-\log \cos l = 0,1859189$
$2 \log \sin l = \bar{1},75984$	$-\log 2 = \bar{1},69897$	$-\log \sin 1'' = 5,3144251$
$\log \text{corr.} = \bar{4},90742$	$-\log \sin 1'' = 5,31443$	$\log P = 3,1507700$
$\text{corr.} = 0,0008080$	$\log D = 0,38009$	$P = 1415'',044$
$\log a = 6,8046154$	$D = -2'', 399$	$= 23', 35'', 044.$
$\log N = 6,8054234$	$l = 49°, 19', 34'', 751$	Dieß ist der gesuchte Längenunterschied.
	Breite von A ... $\lambda = 49°, 19', 32'', 352$	

271) Wenn S und T sehr groß sind, so kann man noch immer l nach (267) berechnen, aber die Breite von A und der Längenunterschied von A und B müssen gefunden werden wie folgt: (Erläuterung (128, 1) dann (125).)

Man habe $l = 60°, 22', 23'', 86$. $S = 6769779,03$.

Rechnung.

$\log \text{tang } l = 0,2451200$	$\log S = \bar{6},8305746$	$\log A = 5,3417936$
$\log b = 6,8032061$	$-\log b = \bar{7},1967939$	$-\log 4 = \bar{1},3979400$
$-\log a = \bar{7},1955846$	$-\log \sin 1'' = 5,3144251$	$\log e = \bar{3},8136593$
$\log \text{tang } l' = 0,2437107$	$\log A = 5,3417936$	$2 \log \sin l' = \bar{1},8776134$
$l' = 60°, 17', 35'', 99$	$A = 219681'', 56$	$\log B = 2,4310065$
	$= 61°, 1', 21'', 56$	

Digitized by Google

$\log B = 2{,}4310$
$\log 7 = 0{,}8451$
$-\log 16 = \bar{2}{,}7959$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}8137$
$2 \log \sin 1' = \bar{1}{,}8776$
$\log C = \bar{1}{,}7633$

$\log C = \bar{1}{,}763$
$-\log 7 = \bar{1}{,}155$
$\log 4 = 0{,}602$
$\log \cos 2A = \bar{1}{,}725$
$\log H = \bar{1}{,}245$

$-\log \sin 1'' = 5{,}31443$
$\log \sin 2A = \bar{1}{,}92821$
$-\log 8 = \bar{1}{,}09691$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$2 \log \sin 1' = 1{,}87761$
$\log D = 2{,}03082$

$\log D = 2{,}031$
$-\log 2 = \bar{1}{,}699$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}814$
$2 \log \sin 1' = \bar{1}{,}878$
$\log F = \bar{1}{,}422$
$\log \cos 2A = \bar{1}{,}725$
$\log 5 = 0{,}699$
$-\log 8 = \bar{1}{,}097$
$\log G = \bar{2}{,}943$

A ist immer positiv . . . . . $= 219681'', 56$
B ist immer negativ . . . . . $= -269'', 78$
C wie A . . . . . $= 0'', 58$
D hat das entgegengef. Zeichen v. sin 2A . . . . . $= -107'', 35$
F hat das Zeichen von sin 2A . . . . $= 0'', 26$
G hat das Zeichen von sin 4A . . . . . $= -0'', 09$
H hat das Zeichen von cos 2A . . . . . $= -0'', 18$

Summen $219682'', 40 \quad -377, 40$
Hiervon $377, 40$

Bleibt $219305'', 00 = 60°, 55', 5'' = x.$

$\log \text{tang } x = 0{,}2547845$
$-\log \cos 1' = 0{,}3049039$
$\log \text{tang } y = 0{,}5596884$
$y = 74°, 35', 26'', 52$
$\log x = 5{,}3410485$
$\log \cos 1' = \bar{1}{,}6950961$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6989700$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}8136593$
$\log A' = 2{,}5487739$
$\log 3 = 0{,}47712$
$-\log 4 = \bar{1}{,}39794$
$\log \varepsilon = \bar{3}{,}81366$
$\log B' = 0{,}25749$

$\log B' = 0{,}25749$
$-\log 3 = \bar{1}{,}52288$
$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$
$2 \log \sin 1' = 1{,}87761$
$\log C' = \bar{1}{,}35695$
$-\log 2 = \bar{1}{,}6990$
$-\log x = \bar{6}{,}6590$
$\log \sin 2x = \bar{1}{,}9292$
$-\log \sin 1'' = 5{,}3144$
$\log D' = \bar{2}{,}9385$

Digitized by Google

A′ imer negativ $= -353'', 81$
B′ immer positiv . . . . . $= 1'', 73$
C′ . . . idem . . . . . $= 0'', 22$
D′ hat das Zeichen von sin 2x $= 0'', 09$

Summen $-5', 53'', 81 + 2'', 04$
Hiervon . . . . . $2'', 04$

Bleibt $-5', 51'', 77$
Hierzu $y = 74^0, 35', 26'', 52$

Längenunterschied $\varphi = 74^0, 29', 34'', 75$

$\log \sin l' = \bar{1}, 9388067$
$\log \cos x = \bar{1}, 6866899$
$\log \sin \psi' = \bar{1}, 6254966$
$\psi' = 24^0, 58', 20'', 04$
$\log \text{tang} \psi' = \bar{1}, 6681228$
$\log a = 6, 8046154$
$-\log b = \bar{7}, 1967939$
$\log \text{tang} \lambda' = \bar{1}, 6695321$
$\lambda' = 24^0, 2', 36'', 47.$

Dieß ist die gesuchte Breite des Punctes A.

Ende.

Digitized by Google

Anhang.

Ueber

Winkelmeßinstrumente.

Digitized by Google

Digitized by Google

Anhang.

Ueber Winkelmeßinstrumente.

1) Unser Zweck im gegenwärtigen Anhange ist eines Theils: die Fehler im Baue eines Winkelmessers erkennen, vermeiden, oder doch wenigstens ihren Einfluß berechnen und corrigiren zu lernen; dann: zu untersuchen, welche Wirkung der fehlerhafte Gebrauch eines genauen Instrumentes auf die durch dasselbe gegebenen Resultate haben kann.

2) Die Winkelmesser geben entweder unmittelbar Horizontalwinkel, oder die Winkel in ihrer Ebene selbst. Im letzten Falle müssen diese Winkel mit Hülfe der Zenithaldistanzen auf den Horizont reduzirt werden. (89)

Wir wollen mit der Betrachtung der Instrumente ersterer Art den Anfang machen. Nehmen wir als Beispiel den mit einem Kippfernrohre *) (Fig. I) versehenen Meßtisch, weil dieser allgemein bekannt ist, und weil alles dasjenige, was wir für denselben sagen werden, sich leicht auch auf andere Horizontalwinkel-Messer anwenden läßt, wie es weiter unten geschehen wird.

Wie die Figur zeigt ist an das Fernrohr eine kegel- oder cylinderförmige Achse m befestigt, welche in einer Büchse von der nämlichen Form herumgedreht werden kann. Die Büchse bildet einen festen Körper mit dem Gestelle c, c, c und dieses ist auf das Linial 11 fest geschraubt.

*) Wir werden dieses Instrument auch mit den Namen Kippregel, Alhidaden-Regel, Alhidade, bezeichnen.

Digitized by Google

3) Die Hauptsache in der eben kurz beschriebenen Alhidade ist die optische Achse des Fernrohres. Sie ist diejenige gerade Linie, in welcher die, im Fernrohre angebrachten sich kreuzenden Fäden zu liegen scheinen, wenn man durch die kleine Oeffnung sieht, welche sich vor dem Augenglase befindet.

wir nach den Regeln der Optik die Beschaffenheit des hier gebrauchten Fernrohres näher betrachten. Es besteht aus zwei linsenförmigen Gläsern, wovon eines (das Ocular-Glas) eine kurze, und das andere (das Objectiv-Glas) eine weit größere Focal-Distanz hat. Diese Gläser, deren Durchschnitte A A, B B, die Figur II. zeigt, sind in einer solchen Entfernung von einander gesetzt, daß ihre Brennpuncte zwischen den beiden Gläsern in einen einzigen Punct fallen.

Man kann nun jeden durch das Fernrohr visirten Punct D so weit entlegen annehmen, daß die von demselben nach dem Objectiv-Glas geworfenen Lichtstrahlen wie Parallellinien betrachtet werden können. Aus dieser Ursache wird, nach den Regeln der Optik, das Bild des visirten Punctes im Innern des Fernrohres auf derjenigen Linie d C D liegen, welche durch D und das Centrum des Objectiv-Glases geht; und wenn man sich mehrere weit entlegene Puncte D, E, F, denkt, welche ihre Strahlen nach dem Glase A A werfen, so werden diese ihre Bilder alle auf einer und der nämlichen Ebene d e f haben, welche von C um die Focal-Distanz der Linse A A entfernt ist. Aber die in d, e, f gesammelten Strahlen gehen von da aus in divergirenden Richtungen wieder fort und erreichen die Linse B B, durch welche sie so gebrochen werden, daß sie beim Ausgange mit denjenigen Linien parallel laufen, welche man von e, f, d nach dem Centrum der Linse B B zieht. In einem Puncte O vor dieser Linse befindet sich das Auge und empfängt also Strahlen von denjenigen Puncten, welche deren nach einem hinlänglich großen Theile der Linse B B werfen, damit unter den gebrochenen auch einige durch O gehen. So empfängt hier das Auge keinen Strahl von D, wie es die Figur zeigt, wohl aber schon von e, f und allen zwischen e und f liegenden Puncten.

Da nun nach dem Vorhergehenden immer mehrere Puncte auf einmal durch das Fernrohr gesehen werden, so hat man, um eine einzige sichere Visirlinie zu bilden, durch zwei sich kreuzenden Fäden einen Punct R (Fig II.) und (Fig. III.) nicht weit von d e bestimmt, welcher denjenigen äußern Punct I zu bedecken scheint, dessen Strahlen

Digitized by Google

erst durch R gehen müssen, ehe sie durch die Refraction der Linse B B nach O gelangen können.

4) Aus dem vorigen Paragraphen wird die Wahrheit folgender Sätze klar einzusehen seyn.

a) Wenn R genau auf der Fläche de liegt, so wird es immer den nämlichen Punct I zu bedecken scheinen, wie man auch den Punct O rücken möge.

b) Ist R hingegen von de mehr oder weniger entfernt, so wird durch das Verschieben von O auch der Punct I versetzt, das heißt, die optische Achse des Fernrohres wird verändert.

Anmerkung. Wenn O ein Kreis von etwas großen Dimensionen ist, so daß man nicht immer gewiß das Auge genau an dem nämlichen Puncte hat, so muß man eine Versetzung des Auges als eine Verschiebung der Oeffnung O betrachten *).

c) Die optische Achse des Fernrohres verändert sich überhaupt, wenn die Stellung der drei Puncte O, C, R gegen die Puncte der Fläche de nicht die nämliche bleibt.

d) Die Gläser sind gewöhnlich excentrisch gefaßt, das heißt, wenn man sie mit ihren Kapseln in dem Hauptrohre herumdreht, so geschieht die Bewegung nicht um eine Linie, welche durch das Centrum des Glases geht. Hieraus folgt, daß das Herumdrehen des Ocular-Glases die optische Achse ein wenig verändern kann, wenn R nicht genau auf de liegt und wenn das Glas excentrisch ist.

Beim Umdrehen des Objectiv-Glases geschieht eine weit bedeutendere Versetzung der optischen Achse. Denn wenn das Centrum des Glases rückt, so rückt offenbar das Bild def mit fort, so daß R nicht mehr den nämlichen Punct bedecken kann, wenn es auch auf der Fläche de läge.

e) Nach diesen Sätzen kann also die optische Achse eines Fernrohres verändert werden, wie folgt:

1. Durch Versetzung von R.
2. Durch Verschiebung von O. (Wenn R nicht auf de liegt).
3. Durch Umdrehen des Ocular-Glases } (Wenn die Gläser excentrisch sind.)
4. Durch Umdrehen des Objectiv-Glases }

*) Der Einfluß, welchen diese Veränderung der Visirlinie hervorbringt, wird gewöhnlich die Parallaxe der Fäden genannt.

Digitized by Google

Man sieht hieraus, daß die excentrische Fassung der Gläser das Gute hat, daß man die optische Achse um ein Kleines vorrücken kann, welches zur Regulirung der Alhidade nothwendig ist, wie wir in dem Folgenden sehen werden.

5) Man weiß, daß bei gehörigem Baue der Alhidaden-Regel (Fig. I.) immer der eine Rand r r des Linials l l die Projection der optischen Achse des Fernrohres auf die untere Ebene des Linials seyn muß. Um den Einfluß der Abweichungen hiervon berechnen zu können, denken wir uns das Linial l l als eine geometrische Ebene; die Achse m, um welche sich das Fernrohr dreht, sei auf ihre Centrallinie und das Fernrohr selbst auf seine optische Achse reduzirt. Aus dem Puncte, wo diese beiden Linien sich begegnen *), werde auf den Rand des Linials ein Perpendikel gefällt.

Fig. IV. stelle die so gedachte Kippregel vor.

A F sei der hier in Betracht kommende Linial-Rand.

N O die Centrallinie der Achse, um welche sich das Fernrohr bewegt.

N T die nach irgend einem Objecte gerichtete Visirlinie oder optische Achse des Fernrohres.

N Q das Perpendikel, welches aus N auf A F gefällt wird.

N H ein Perpendikel auf die Ebene des Linials und

T und O die Puncte, wo die Linien N T und N O die nämliche Ebene schneiden.

Man ziehe H T, H Q, H O.

Wäre nun das Instrument fehlerfrei, so müßte N H mit N Q und H O mit H Q einerlei seyn. Ferner wäre N O auf N T und auf N H senkrecht und folglich läge H T in der Richtung Q A.

Trifft dieses nicht zu, wie wir es auch in der gegenwärtigen Figur unterstellt haben, so ist der Winkel von H T mit A F die zu suchende Abweichung, weil H T die Projection von N T auf das Linial ist, und A F diese Projection seyn soll.

Man nenne H N Q ... I, H N O ... 90° — α, T N O ... 90° — γ, Q H O ... m, T N H ... δ, so werden I, α, γ, m sehr kleine Größen seyn, welche man als bekannt annehmen muß, wenn die Form der Alhidade bestimmt seyn soll; δ hingegen hängt von der Höhe des Punctes ab, nach welchem visirt wird.

Man denke sich nun aus N mit einem willkührlichen Radius zwischen den drei Linien N T, N H, N O, ein sphärisches Dreieck beschrieben, dessen Seiten δ, 90° — α, 90° — γ bekannt sind.

*) Warum dieses Begegnen unterstellt werden dürfe, siehe weiter unten.

Digitized by Google

Der Winkel, welcher der Seite $90° - \gamma$ gegenübersteht, ist gleich THO und man hat:

$\cos(THO) = \frac{\sin\gamma - \cos\delta \sin\alpha}{\sin\delta \cos\alpha}$ oder, wenn man nur erste Potenzen beibehält

$\cos(THO) = \frac{\gamma - \alpha\cos\delta}{\sin\delta}$. Der gesuchte Winkel von TH mit AF ist

$90° - THQ = 90° - THO - m$, oder, wenn man $90° - THO$, x nennt,

$90° - THQ = x - m$. Man hat dann auch $\sin x = \frac{\gamma - \alpha\cos\delta}{\sin\delta}$ und hieraus

$x = \frac{\gamma - \alpha\cos\delta}{\sin\delta}$. Die gesuchte Correction ist also gleich $\frac{\gamma - \alpha\cos\delta}{\sin\delta} - m$.

Aus dieser Formel geht hervor:

1. daß die Abweichung I keinen Einfluß auf das Resultat hat. Die Ursache davon kann man leicht einsehen; denn wenn außer I kein Irrthum im Instrumente wäre, so könnte der Einfluß von I nur darin bestehen, daß die Visirlinie parallel mit ihr selbst ein wenig verrückt würde, und zwar bei jeder Stellung derselben um gleichvieles, welches hier nicht beachtet zu werden braucht, da wir zwei gerade Linien, welche aus ganz nahe bei einander gelegenen Puncten nach einem entfernten Objecte hin gezogen sind als parallel ansehen dürfen. Wir haben dieß auch wirklich schon in dem Vorhergehenden gethan, da wir nur den Winkel von HT mit AF und nicht die Entfernung HQ betrachtet haben, und auch als wir oben annahmen, daß die Visirlinie und die Centrallinie der Achse m sich in einem Puncte begegneten, welches nicht immer genau Statt findet, aber durch eine kleine parallele Versetzung der Visirlinie bewirkt werden kann.

2. Sehen wir, daß bei der Frage, um wieviel ein Winkel durch die Fehler der Alhidaden-Regel alterirt werden könne? auch die Größe m außer Acht bleiben darf. Denn da beide Schenkel desjenigen Winkels, welcher auf dem Winkelmesser gebildet wird, um die nämliche Größe m und im nämlichen Sinne von der Projection der Visirlinie abweichen, so bleibt der Winkel selbst durch den Einfluß von m unverändert. (Siehe auch (12).)

Nur in dem Falle wäre m zu berücksichtigen, wenn man auf dem nämlichen Instrumente zwei verschiedene Alhidaden gebrauchte.

3. So wie mit m verhält es sich auch mit den Größen α und γ, wenn die Objecte, nach welchen man visirt, alle gleiche Höhenwinkel oder Zenithaldistanzen δ haben. (Siehe auch (12).)

Digitized by Google

Nimmt man daher in einer sehr ebenen Gegend auf, so kann man sich schon mit einer ziemlich fehlerhaften Alhidade behelfen.

6) Wir wollen nun sehen, wie die Fehler α, γ, erkannt und verbessert werden können. Nehmen wir an, sie haben beide zugleich Statt und man wolle zuerst γ corrigiren.

Man setze die Alhidaden-Regel auf dem Meßtische an irgend einen bestimmten Punct, und stecke in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten des gewählten Standpunctes zwei Pfähle so, daß ihre Spitzen mit dem Puncte N (Fig. IV.) der Alhidade eine gerade Linie bilden. Dirigire dann die Visirlinie nach der Spitze des einen Pfahles. Halte das Linial fest und drehe das Fernrohr um seine Achse ganz herum, bis das Ocular-Glas dahin kömmt, wo vorhin das Objectiv-Glas war und umgekehrt. War dann γ nicht Null, so hat die Visirlinie eine Kegelfläche beschrieben, und die beiden entgegengesetzten Stellungen, welche sie nach einander einnahm, könne nicht in einer geraden Linie liegen, welches bei $\gamma = o$ nothwendig der Fall seyn würde. Die Visirlinie kann also hier nicht durch die Pfahlspitze, gegen welche sie nun gekehrt ist, gehen, sondern sie muß um einen doppelt so großen Winkel von derselben abweichen als γ beträgt.

Um den Irrthum zu corrigiren, muß man deshalb die optische Achse so viel rücken, daß die Statt findende Abweichung zur Hälfte verschwindet. Nach einigen Versuchen wird man es dahin bringen, die Visirlinie genau senkrecht auf die Central-Linie der Achse *) zu setzen, und ist dieses einmal geschehen, so hat es für immer Statt, so lange die Achse nicht durch die Reibung eine andere Centrallinie einnimmt, welches bei kegelförmigen Achsen am wenigsten zu befürchten ist.

7) Man kann γ auch auf eine andere Art erkennen. Hierzu stelle man das Fernrohr so, daß seine optische Achse mit der Ebene des Linials genau oder doch sehr nahe parallel ist. Visire dann nach einem entlegenen Puncte; drehe die ganze Alhidade herum und setze den Rand des Linials noch einmal an die nämliche Linie wie vorhin. Ist dieses geschehen, so drehe man das Fernrohr, welches nun sein Objectiv-Glas gegen den Beobachter kehrt, um seine Achse, bis das Ocular-Glas wieder so steht, daß man nach dem nämlichen Puncte

*) So oft wir geradezu Achse oder Achse des Fernrohrs sagen, verstehen wir die Achse m Fig. I, um welche sich das Fernrohr dreht. Wenn wir die optische Achse bezeichnen wollen, so wird dieses immer ausführlich geschehen.

Digitized by Google

Puncte visiren kann, wie anfangs. Thut man dieß und die Visirlinie geht nicht durch diesen Punct, so hat der Irrthum γ Statt, und die beobachtete Abweichung ist $=2\gamma$; sie läßt sich wie bei der vorigen Methode corrigiren.

Die Gründe des eben beschriebenen Verfahrens sind folgende: Ist nämlich die Visirlinie KM Fig. V. a) mit der Ebene des Linials parallel, so kann α keinen Einfluß haben, wie aus (5) hervorgeht und auch schon dadurch erhellt, daß für diesen Fall durch die Wirkung von α, KM nur parallel mit sich selbst und äußerst wenig gerückt werden kann.

Stellt nun AB Fig. V. b) die Achse vor, um welche sich das Fernrohr dreht, und ist TT eine auf derselben senkrechte Linie, so wird, nachdem die ganze Alhidade herumgedreht ist, die Fig. b) sich in c) verwandeln; wenn man also dann noch die Linie KM um die Achse AB bewegt, so kömmt sie in K'M' und bildet mit KM einen Winkel gleich 2γ, wie zu beweisen war.

Die gegenwärtige Methode ist einfacher und leichter überall auszuführen als die vorige, aber sie bietet weniger Zuverläßigkeit dar, weil es nicht ganz leicht ist das Fernrohr mit der Ebene des Linials parallel zu setzen, welches doch durchaus nöthig ist, wenn der Einfluß von α sich nicht mit dem von γ mischen soll. Ebenso ist es auch hier beschwerlich das Linial zweimal und zwar von verschiedenen Seiten genau an die nämliche Linie zu bringen.

8) Wir gehen nun zu der Abweichung α über.

Denken wir γ sei Null, so daß die Visirlinie beim Umdrehen eine Ebene beschreibe. Diese wird die Ebene des Linials in einer geraden Linie schneiden, welche mit dem Rande desselben im Allgemeinen irgend einen kleinen Winkel macht.

Der Irrthum, den wir hier erforschen wollen, entspringt daraus, daß die Achse, um welche sich das Fernrohr bewegt, nicht genau die mit der Ebene des Linials parallel läuft. Wir wollen für einen Augenblick annehmen, daß dieser Parallellismus Statt finde. Es sei rr Fig. VI. der Rand des Linials, AF die Durchschnittslinie der Ebene des Linials mit derjenigen, welche die Visirlinie KNM beschreibt. Dann muß in unserer Unterstellung das Perpendikel NO, welches aus dem Drehpuncte der Linie KM auf die Ebene des Linials gefällt wird, in der Linie AF eintreffen.

Nehmen wir nun das ganze Instrument, und drehen es auf der Ebene des Linials herum, bis daß rr die verkehrte Stellung, aber noch immer die nämliche Linie einnimmt,

Digitized by Google

so wird AF mit sich selbst parallel bleiben, ebenso NO und folglich auch die Ebene NAF; doch wird der Punct A, wo die verlängerte Visirlinie die AF schneidet, auf die entgegengesetzte Seite fallen. Man muß also, um noch einmal nach dem nämlichen Puncte wie anfangs visiren zu können, das Fernrohr herumdrehen, so daß die Gläser ihre Stellen wechseln. Thut man dieß, und zwar so, daß die Visirlinie mit NO den nämlichen Winkel wie vorhin bildet, so wird sie auch in eine der früheren sehr nahe und mit ihr parallele Stellung kommen, das heißt, sie wird durch den nämlichen Punct gehen wie anfangs.

Ist nun aber α nicht $= o$, so wird das Perpendikel NO nicht auf AF, sondern daneben fallen. Macht man also die nämliche Operation wie vorhin, so kann die Ebene NAF und folglich auch die Visirlinie nicht mit sich selbst parallel bleiben; diese geht also in ihrer zweiten Stellung nicht durch den nämlichen Punct wie in der ersten, sondern sie wird doppelt so weit davon abweichen, als der Unterschied zwischen ihrer Richtung und derjenigen, die sie haben sollte, beträgt *).

9) Hat man den Fehler α, wie (8) ausweißt, erkannt, und man will ihn verbessern, so ist kein anderes Mittel als die Neigung der Achse m Fig. I. gegen die Ebene des Linials um so viel zu verändern, bis die beobachtete Abweichung zur Hälfte getilgt ist.

Hierzu lassen sich leicht Vorrichtungen anbringen, welche zu beschreiben außerhalb unseres gegenwärtigen Zweckes liegt.

Anmerkung. Die Correction des Irrthums α scheint das Visiren nach einem bedeutend höhern Gegenstande als der Standpunct, in welchem man sich befindet, zu erfordern. Allein, wenn man bedenkt, daß das Fernrohr nur gegen die Ebene des Linials und keineswegs gegen den Horizont geneigt zu seyn braucht, so kann man die Ebene des Winkelmessers, worauf die Alhidade steht, so neigen, daß das Fernrohr fast horizontal und doch gegen die Ebene des Linials geneigt seyn kann **).

---

*) Dieses leidet indessen eine Ausnahme; denn wenn man zufälliger Weise der optischen Achse eine solche Stellung gegeben hätte, daß sie mit derjenigen Linie parallel gewesen wäre, in welcher sich die beiden Ebenen NAF (das heißt die beiden Stellungen der Ebene NAF) schneiden, so würde die Linie KM doch mit sich selbst parallel geblieben seyn, obgleich sie das zweite Mal in einer Ebene lag, welche mit derjenigen, in welcher sie beim ersten Male gezogen war, nicht parallel läuft. Man muß also, um den Fehler α gehörig zu erkennen, die eben erklärte Methode für mehrere Stellungen des Fernrohres in Anwendung bringen.

**) Man sieht, daß zur Berichtigung einer Alhidade nach unsern Vorschriften, dieselbe so eingerichtet seyn

Digitized by Google

10) Eine andere Methode, um α zu corrigiren, ist folgende *); man begreift, daß, wenn die Alhidade auf eine horizontale Ebene gesetzt wird, die Visirlinie beim Umdrehen um die Achse eine verticale Ebene beschreiben müßte, wenn der Irrthum α nicht Statt fände. Könnte man also zwei Puncte bestimmen, welche auf einer und der nämlichen Verticale lägen, und mit der auf eine horizontale Ebene gesetzten Alhidade nach einem dieser Puncte visiren, so müßte die Visirlinie gehörig herumgedreht auch durch den andern der beiden Puncte gehen, wenn $\alpha = 0$ wäre. Trifft dieses also nicht zu, so weiß man, daß der Irrthum α Statt findet.

Nun kann man aber leicht zwei auf der nämlichen Verticale gelegene Puncte folgendermaaßen bestimmen. Man setze an irgend einen Ort, von woher ein höher liegender und möglichst entfernter Punct gesehen werden kann, ein Gefäß mit Wasser oder irgend einer andern Flüssigkeit; diese wird eine horizontale Ebene BB Fig. VII. bilden, in welcher, wie in einem Spiegel, das Bild des Punctes A, nämlich A′ gesehen werden kann, und zwar so, daß AA′ eine verticale Linie ist. Setzt man also die Alhidade in einen solchen Punct C, daß man zugleich A und A′ visiren kann, so sind alle Bedingungen erfüllt, damit der Irrthum α, wie zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphen gesagt ist, erkannt werden könne. Die Correction desselben geschieht wie früher **).

11) Wenn man es nicht dahin bringen kann α und γ gänzlich zu tilgen, so ist es nothwendig diese Größen zu kennen, um nach (5) den Irrthum zu berechnen, welchen man durch den Gebrauch der fehlerhaften Alhidade zu befürchten hat.

Um die Werthe von α und γ zu finden, wollen wir uns denken, daß mit der Alhidade die nämliche Operation gemacht werde als wollte man α nach der Methode (8) erkennen und verbessern. Betrachten wir hierzu die in (5) erklärte Fig. IV., welche die Alhidade mit allen ihren nur möglichen Mängeln darstellt, und nehmen wir zur Vereinfachung derselben an, daß der Linien-Rand AF durch den Punct H gehe, welches wir

---

muß, daß das Fernrohr um seine Achse im Kreise herumgedreht werden könne. Wäre dieses indessen nicht, so könnte man sich dadurch helfen, daß man das Fernrohr aus der Büchse heraus nähme und es verkehrt wieder einsteckte.

*) Ich verdanke die Mittheilung dieser Methode dem Herrn Lipkens, ingenieur en chef du cadastre in Luxemburg.

**) Die hier beschriebene Methode hat das Mangelhafte, daß sie erfordert, die Ebene, worauf die Alhidade gesetzt wird, sei vollkommen horizontal, welches zu erreichen nicht ohne Schwierigkeit ist.

Digitized by Google

offenbar dürfen, da dieß nur eine kleine Versetzung der Visirlinie parallel mit ihr selbst erfordert. Auf diese Weise werden wir zum Theil die Fig. VIII. erhalten, wo gleiche Buchstaben mit denen in Fig. IV. gleiche Bedeutungen haben. Drehen wir nun nach der Vorschrift (8) die Alhidade herum, so wird AF in sich selbst in A'F', HO in seine Verlängerung HO' und TH in seine Verlängerung T'H fallen. Die Achse NO wird also in NO' und die Visirlinie TN in T'N liegen.

Da nun hierauf die Visirlinie T'N um die Achse NO' gedreht wird, bis T' wieder in die Ebene des Linials, aber zu der Seite HT hin fällt, so muß, weil der Winkel von T'N mit NO' beim Umdrehen der nämliche bleibt, T' eine solche Stellung T'' in der Ebene des Linials einnehmen, daß der Winkel T'HO' = T''HO' ist; folglich wird auch THT'' = 2 (90° — THO) seyn.

Aber nach (5) ist $90° - THO = \frac{\gamma - \alpha \cos \delta}{\sin \delta}$, also $THT'' = \frac{2(\gamma - \alpha \cos \delta)}{\sin \delta}$.

Dieses THT'' ist der Winkel, um welchen das Linial auf der Ebene des Winkelmessers gedreht werden müßte, damit die Visirlinie bei der zweiten Beobachtung auf den nämlichen Punct wie das erste Mal gerichtet wäre. Man könnte zwar diesen Winkel auf der Ebene des Instruments unmittelbar messen; allein weit genauer führt Folgendes zum Zwecke.

Wenn man zwischen NH, NT, NT'' ein sphärisches Dreieck denkt, so ist leicht zu sehen, daß: $\cos(TNT'') = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos(THT'')$ oder

$1 - 2 \sin^2 \frac{(TNT'')}{2} = \frac{\sin\left(\frac{TNT''}{2}\right)}{\sin \delta}$ ist; oder, da THT'', TNT'' sehr kleine Winkel sind, hat man $THT'' = \frac{TNT''}{\sin \delta}$. Dieser Werth giebt uns die Gleichung $TNT'' = 2(\gamma - \alpha \cos \delta)$, und diese führt uns durch die Kenntniß von TNT'' zum nämlichen Zwecke, zu dessen Erreichung vorhin THT'' hätte bekannt seyn müssen.

Der Winkel TNT'' ist aber leicht zu bestimmen. Man bemerke nämlich nur, wieweit die Visirlinie von dem anfangs visirten Puncte bei der zweiten Beobachtung in Längenmaaß abweicht; dividire diese Abweichung durch die Entfernung des visirten Punctes von dem Instrumente und durch sin 1'', so hat man TNT'' in Secunden. Außerdem ist es noch nöthig zu bemerken, ob THT'' und folglich auch TNT'' positiv oder negativ sei. Denn von oben her ist THT'' = 2(90° — THO) und deshalb wird für THO > 90°, THT''

Digitized by Google

negativ. Ob dieſes nun ſei oder nicht iſt leicht zu erfahren. Denn die Fig. VIII. und das oben Geſagte zeigen, daß, wenn $THO > 90°$ iſt, die Linien TH und T″H immer die hier gezeichneten Stellungen gegen HO haben müſſen; daß hingegen für $THO > 90°$, TH die Stelle von T″H und T″H die von TH einnehmen würde. Dieß beweiſt uns alſo, daß man für $THO < 90°$ oder THT″ poſitiv, nach Beendigung der zweiten Beobachtung, den Theil der Alhidade, welcher dem Beobachter zunächſt ſteht, von der Linken zur Rechten drehen müſſe, um noch einmal den nämlichen Punct wie anfangs in der optiſchen Achſe zu erhalten; hingegen würde hier $THO > 90°$ oder THT″ negativ, dieſelbe Bewegung von der Rechten zur Linken geſchehen müſſen; man kann alſo leicht das Zeichen von THT″ beſtimmen, und da, wie ſchon bemerkt, THT″ und TNT″ einerlei Zeichen haben, ſo iſt TNT″ als vollkommen bekannt anzuſehen.

Nennt man dieſen Winkel A, ſo hat man die Gleichung $A = 2(\gamma - \alpha \cos \delta)$, in welcher γ und α unbekannt ſind, δ nach Willkühr angenommen werden kann und A ſich durch die Beobachtung ergiebt. Zur Auffindung der unbekannten α, γ führt dieſe Gleichung folgendermaaßen.

Man ſuche die Werthe von A zu zwei verſchiedenen Werthen von δ; man erhält dann:

$$A = 2\gamma - 2\alpha \cos \delta$$
$$A' = 2\gamma - 2\alpha \cos \delta'$$
$$A - A' = 2\alpha(\cos \delta' - \cos \delta)$$
$$A + A' = 4\gamma - 2\alpha(\cos \delta + \cos \delta');$$

von dieſen Gleichungen giebt die erſte α und die zweite γ durch α.

Es würde ſich alles ſehr vereinfachen, wenn man δ und δ' ſo wählen könnte, daß $\delta = 180° - \delta'$ wäre; denn man erhielte in dieſer Unterſtellung:

$$\alpha = \frac{A' - A}{4 \cos \delta}, \quad \gamma = \frac{A + A'}{4}.$$

Um alſo nach dieſen Formeln α und γ zu finden, bleibt uns nur noch übrig zu zeigen, wie man zwei δ, wovon das eine das Supplement des andern iſt, und die zugehörigen A finden kann. Da, wie wir in folgendem §. ſehen werden, eine äußerſte Genauigkeit in der Beſtimmung von α unnöthig iſt, ſo kann man ſich hier mit einem ohngefähren Werthe von δ begnügen. Es iſt aber nicht ſchwer zwei Stellungen des Fernrohres zu erhalten, in welcher ohngefähr $\delta' = 180° - \delta$ ſei.

Digitized by Google

Hierzu braucht man nur die Alhidade auf die horizontal gestellte Ebene des Winkelmessers zu setzen und zwei Puncte so wie (10) Fig. VII. zu visiren. Da jedoch diese Puncte ziemlich nahe bei dem Standpuncte gewählt werden müssen, weil sie sonst kein bedeutendes δ gäben, so können sie nicht wohl zur Bestimmung von A und A′ dienen, weil diese kleinen Abweichungen nur in großen Entfernungen einen bedeutenden leicht zu beobachtenden Einfluß haben.

Aber es ist auch keinesweges nöthig, diejenigen Puncte, welche zur Auffindung der Stellungen des Fernrohres, in welchen $\delta = 180° - \delta'$ ist, gedient haben, zur Bestimmung von A und A′ zu visiren. Denn, wie wir in der Anmerkung (9) gesagt haben, kann man, nachdem man dem Fernrohr eine gewisse Stellung gegeben hat, jeden andern beliebig entlegenen Punct visiren, indem man die Ebene des Winkelmessers gehörig neigt.

Man hat also hierdurch alle Mittel um A und A′ zu bestimmen; das δ kann leicht aus der Entfernung des Punctes, durch welchen man $\delta = 180° - \delta'$ erhält, und aus der Höhe desselben Punctes über dem Standpuncte gefunden werden.

12) Nehmen wir nun α und γ als bekannt an, so können wir nach (5) die Irrthümer, welche in den gemessenen Winkeln zu befürchten sind, genau berechnen. Denn gemäß der citirten Stelle ist die Abweichung des einen Schenkels

$$\frac{\gamma}{\sin \delta} - \frac{\alpha}{\tang \delta} - m,$$

und ebenso die Abweichung des andern $\frac{\gamma}{\sin \delta'} - \frac{\alpha}{\tang \delta'}$; also im ganzen Winkel ein

$$\text{Irrthum von } \frac{\gamma (\sin \delta' - \sin \delta)}{\sin \delta' \sin \delta} - \frac{\alpha (\tang \delta' - \tang \delta)}{\tang \delta' \tang \delta} =$$

$$= \frac{2 \sin \left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right)}{\sin \delta' \sin \delta} \left\{ \gamma \cos \left(\frac{\delta' + \delta}{2}\right) - \alpha \cos \left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) \right\}.$$

Dieser Irrthum ist desto kleiner, je weniger δ' und δ von einander verschieden sind. Wie groß er aber werden könne, hängt davon ab, wie klein höchstens δ und δ' angenommen werden dürfen, und um wieviel die eine oder die andere dieser Größen 90° übersteigen könne. Uebrigens kömmt es auch darauf an, ob γ und α einerlei oder verschiedene Zeichen haben. Da aber in allen geodätischen Operationen δ und δ' immer nahe bei 90° seyn müssen, so ist es im Allgemeinen gewiß, daß die Coeffizienten von α und γ sehr kleine Zahlen seyn

Digitized by Google

werden, aus dieser Ursache haben wir im vorigen Paragraphen eine äußerste Genauigkeit in der Bestimmung von α und γ für unnöthig erachtet.

13) Wir wollen uns nun mit dem zweiten Theil des Horizontalwinkel-Messers, nämlich mit der Ebene desselben beschäftigen.

Sei es, daß man den Meßtisch oder ein Scheibeninstrument, wie z. B. einen Theodoliten, betrachte, so ist immer der Zweck der Ebene, worauf sich die Alhidade bewegt, daß der Rand des Linials, welcher beim Meßtische wirklich vorhanden, bei dem Theodoliten hingegen nur angedeutet ist, in zwei verschiedenen Stellungen auf der fraglichen Ebene einen Winkel bilde, welcher gleich der horizontalen Projection des zu messenden, auf dem Felde gegebenen Winkels sei.

Es ist also nothwendig, daß die Ebene des Winkelmessers genau horizontal gestellt werde. Um zu sehen, welchen Irrthum eine Abweichung hiervon hervorbringt, diene Folgendes:

Es sei CDEB (Fig. IX.) die Ebene des Winkelmessers, welche eine kleine Neigung I gegen den Horizont habe. Durch den Punct A, um welchen die Alhidadenregel gedreht wird, lege man eine horizontale Ebene, welche die CDEB in irgend einer geraden Linie CAB schneidet.

Dächte man sich, daß die Ebene des Winkelmessers horizontal gesetzt, und hierauf die optische Achse des Fernrohres nach dem nämlichen Puncte wie vorhin gerichtet würde, so könnte man gewiß annehmen, daß die Visirlinie in ihrer zweiten Stellung mit ihrer Lage in der ersten Stellung parallel liefe. Da wir nun aber die Alhidaden-Regel als richtig annehmen, und folglich der Rand des Liniales AR als die Projection der Visirlinie MN auf diejenige Ebene, worauf die Alhidade steht, zu betrachten ist, so muß man, um die Lage des Linial-Randes auf den beiden Ebenen, CDEB und der horizontalen, zu erhalten, durch A mit der Visirlinie eine Parallele ziehen und diese sowohl auf CDEB als auch auf die horizontale Ebene projiciren.

AN Fig. X. sei die Parallele; AB der Durchschnitt der horizontalen Ebene mit der schiefen. PA sei auf jener, P′A auf dieser senkrecht; AK bedeute die Projection von AN auf die horizontale und Ak′ die Projection von AN auf die schiefe Ebene. In dieser Voraussetzung werden PA, AN, AK einerseits und P′A, AN, Ak′ andererseits in der nämlichen Ebene liegen; PAP′ wird gleich I seyn, und, wenn man KAB, V

Digitized by Google

und K'AB, V' nennt, so ist leicht zu sehen, daß die Ebene PAP', welche auf AB senkrecht steht, mit PAK einen Winkel $=90°+V$ macht; ebenso ist der Winkel von PAP' mit P'AK' nach innen zu $=90°-V'$. Denkt man sich also aus A als Centrum zwischen den drei Linien PA, P'A und AN ein sphärisches Dreieck $\alpha\beta\gamma$ beschreiben, so wird in diesem $\alpha\beta=I$, $\beta=90°+V$, $\alpha=90°-V'$ und $\beta\gamma=\delta$ seyn, wenn man, wie früher, den Winkel PAN, δ nennt. In diesem Dreiecke ist: $\cos\alpha\gamma = \cos I\cos\delta - \sin I\sin\delta\sin V$, oder, wenn man nur die erste Potenz von I beibehält: $\cos(\alpha\gamma)=\cos\delta - I\sin\delta\sin V$. Setzt man $\alpha\gamma=\delta+MI$, so wird $\cos(\alpha\gamma)=\cos\delta - I\sin\delta.M$, woher $M=\sin V$, und folglich $\alpha\gamma=\delta+I\sin V$. Aber es ist auch: $\sin\delta:\cos V'=\sin(\alpha\gamma):\cos V$, also: $\cos V'=\frac{\cos V\sin\delta}{\sin(\alpha\gamma)}=\frac{\cos V\sin\delta}{\sin\delta+I\sin V\cos\delta}=\cos V(1-I\sin V\cot\delta)=\cos V - I\sin V\cos V\cot\delta$.

Hieraus findet man auf dem nämlichen Wege wie eben

$V'=V+I\cos V\cot\delta$. Für eine andere visirte Linie würde man $W'=W+I\cos W\cot\delta'$ erhalten haben, mithin wird

$W'-V'=W-V+I(\cos W\cot\delta'-\cos V\cot\delta)$.

Nun ist aber offenbar $W-V$ ein Horizontalwinkel und $W'-V'$ derjenige, welchen man an seiner Statt findet, wenn die Ebene des Winkelmessers um I gegen den Horizont geneigt ist: die vorige Gleichung löst also unsere Aufgabe.

Wenn man horizontal visirte, so wären δ und δ' gleich 90°, folglich der Irrthum im Winkel $=0$ oder vielmehr von der zweiten Ordnung, d. h. mit I^2 multiplizirt; in diesem Falle begienge man also nur einen sehr unbedeutenden Irrthum.

Im Allgemeinen visirt man, auch selbst mit dem Meßtische, nicht wohl höher als 10°, so daß δ nicht kleiner als 80° ist. Dann kann nach unserer Formel im schlimmsten Falle der Irrthum noch nicht $2I\tang 10°$ oder $0{,}36.I$ betragen. Da nun bei der ganz gewöhnlichsten Einrichtung des Meßtisches seine Ebene sich schon bis auf einige Minuten genau horizontal stellen läßt, so ist der hier berechnete Irrthum für dieses Instrument nicht zu beachten. Hingegen wäre er sehr bedeutend in solchen Winkeln, die zu einem trigonometrischen Netze gehören; doch wird er dann sehr dadurch vermindert, daß nur kleine Höhenwinkel vorkommen und daß man die Scheibe des Instrumentes weit genauer horizontal stellen kann *).

*) Man kann sich auch durch die vorhergehende Untersuchung einigermaaßen davon einen Begriff bilden, auf

Digitized by Google

14) Um die vorhergehende Theorie anzuwenden, muß man für jede schiefe Ebene die Neigung I und die Richtung der Horizontallinie AB zu bestimmen wissen, welches wir in Folgendem lehren wollen.

Zu diesem Zwecke bedient man sich der allgemein bekannten röhrenförmigen oder dosenförmigen Wasserwage (niveau à bulle d'air), welche vor allem regulirt werden muß wie folgt:

1. Um den Stand auszumitteln, welchen die Luft-Blase einnehmen muß, wenn die Wasserwage auf einer horizontalen Ebene steht *).

Man stelle die röhrenförmige Wasserwage auf eine beinahe horizontale Linie. Bemerke den Stand, welchen die darin befindliche Luftblase einnimmt. Drehe die Wasserwage auf der nämlichen Linie herum, bis sie die entgegengesetzte Stellung erhält. Befindet sich dann die Luftblase genau an dem nämlichen Platze wie vorhin, so ist die Linie, auf welche die Wasserwage gesetzt wurde, eine horizontale und die Blase hat diejenige Lage, welche sie haben würde, wenn die Wasserwage auf einer horizontalen Ebene stände. Weicht aber, nachdem das Instrument herumgedreht ist, die Luftblase von ihrer früheren Stellung ab, so muß man die Linie, auf welcher es steht, um so viel neigen, daß die Luftblase bis zur Hälfte gegen ihren vorigen Stand zurückkehrt. Nach einigen Versuchen wird es dann gelingen auf der Röhre zwei Puncte zu bezeichnen, innerhalb welchen die Base stehen muß, wenn die Wasserwage auf eine horizontale Linie gesetzt wird **).

---

welche Art die Winkel unrichtig werden, wenn die Ebene des Winkelmessers nicht gut gearbeitet ist. Denn die Unregelmäßigkeiten derselben geben dem Rande des Alhidaden-Linials eine gegen den Horizont geneigte Stellung und bringen einen solchen Irrthum hervor, als wenn die Ebene selbst geneigt wäre. Indessen ist zu bemerken, daß dann für jede Stellung der Alhidade ein anderes AB und ein anderes I Statt findet.

*) Wir beschreiben hier nur das practische Verfahren. Die theoretische Erklärung ist sehr leicht für jeden der das Instrument kennt, wenn er nur denkt, daß bei der röhrenförmigen Wasserwage die Röhre eine nach oben zugekehrte sehr geringe kreisbogenförmige Biegung hat, und daß bei dosenförmigen Niveaux der gläserne Deckel ein kleines Stück Kugelfläche seyn muß.

**) Gewöhnlich sucht man die Wasserwage so einzurichten, daß diese beiden Puncte möglichst in die Mitte der Röhre zu liegen kommen. Dieser Zweck kann nur erreicht werden, wenn die Kapsel, in welcher sich die Röhre befindet, gegen das untere Gestell derselben durch eine Haarschraube ein wenig geneigt werden kann. Man muß dann bei dem obigen Verfahren das Zurückkehren der Blase halb durch die Neigung der Ebene und halb durch die Haarschraube bewirken.

Digitized by Google

Ist dieses geschehen, so theile man den Zwischenraum der beiden Puncte in eine gerade Anzahl gleicher Theile und trage diese auf die übrige Röhre fort. Den mittleren Theilungspunct bezeichne man mit o und die übrigen zur Rechten und zur Linken mit aufeinander folgenden Nummern. Man weiß dann, daß die Linie, auf welche die Wage gesetzt wird, horizontal ist, wenn die Endpuncte der Blase gleichweit von o abstehen; wie weit sie aber entfernt seien, thut nichts zur Sache, weil dieß blos von der Temperatur abhängt, durch welche sich die in der Röhre befindliche tropfbare Flüssigkeit mehr oder weniger ausdehnt und so die Blase mehr oder weniger comprimirt.

2. Um die Neigung einer Linie, auf welcher die Wage steht, gegen den Horizont zu finden, wenn die Mitte der Blase um einen oder mehrere Theile der Röhre von o abweicht.

Hierzu muß man wissen, daß bei gut gearbeiteten Wasserwagen die Abweichungen dieser Art mit den Neigungen der Linie in Proportion stehen müssen. Man stelle nun die Wage auf das Linial einer Alhidaden-Regel, welche selbst auf der Ebene eines Winkelmessers steht. Richte diese Ebene so, daß die Wage anzeige, das Linial sei horizontal und visire nach einem entlegenen Gegenstande, am besten auf das Fenster eines Gebäudes. Neige dann die Ebene des Winkelmessers bis die Mitte der Blase um eine gewisse bedeutende Anzahl Theile von o abweicht. Sehe hierauf durch das unberührt gebliebene Fernrohr, um wieviel tiefer oder höher es zeigt als vorhin. Messe diesen Höhenunterschied; dividire ihn durch die Entfernung des visirten Gegenstandes und durch sin 1″, so erhält man die Anzahl Secunden, um welche das Linial geneigt worden ist, und dieser entspricht die beobachtete Abweichung der Blase. Weiß man so, wie viele Secunden einer Abweichung von mehreren Theilen der Röhre zugehören, so kann man nach dem oben ausgesprochenen Satze, daß die Abweichungen mit den Neigungen proportionirt sind, leicht sehen, wie viele Secunden Neigung eine Abweichung von einem Theile der Röhre andeutet.

15) Mit Hülfe einer so eingerichteten und erforschten röhrenförmigen Wasserwage ist es leicht die Neigung I der Ebene des Winkelmessers gegen den Horizont zu bestimmen. Man drehe nämlich die auf diese Ebene gestellte Wasserwage so lange herum bis man die Stellung gefunden hat, wo die Blase am meisten von der Mitte abweicht; die Neigung welche der dann Statt habenden Abweichung entspricht, ist das gesuchte I

Digitized by Google

Wollte man nun auch die Lage von AB, das heißt von derjenigen Linie, welche auf der Ebene des Winkelmessers horizontal ist, haben, so müßte man die Wasserwage so lange drehen, bis die Blase in die Mitte käme; die Röhre würde dann in der Richtung AB stehen. Diese Richtung ist senkrecht auf derjenigen, in welcher die größte Abweichung Statt findet.

16) Der Gebrauch der dosenförmigen Wasserwage ist etwas einfacher als der der röhrenförmigen.

Um erstens die Stellung zu finden, welche die Blase einnehmen muß, wenn das Instrument auf einer horizontalen Ebene steht, verfahre man durch Umdrehen wie vorhin (14), nur daß man die Wasserwage auf eine Ebene und nicht auf eine Linie stellt. Auf diese Art wird ein Kreis gefunden, innerhalb wessen die Blase bei jedem Umdrehen der Wage stehen bleibt. Man beschreibe aus dem Centrum desselben auf dem gläsernen Deckel der Dose eine Menge gleichweit abstehender concentrischer Kreise und numerire diese wie vorhin die Theilungspuncte der Röhre. Man findet dann auf die nämliche Art wie (14), welcher Neigung der Ebene eine gewisse Abweichung der Blase entspricht.

Stellt man diese so eingerichtete Wasserwage auf die Ebene des Winkelmessers, so zeigt sie ohne weiteres die Lage der Linie AB und I an. AB ist nämlich auf derjenigen Richtung senkrecht, in welcher die Blase vom Centrum abgeht.

17) Von den Winkelmessern, die keine Horizontalwinkel, sondern die Winkel in ihrer Ebene selbst geben.

Diese Instrumente müssen auch dienen können um Zenithaldistanzen zu messen; denn nur so geben sie die nöthigen Elemente, um Horizontal-Winkel zu erhalten.

Wir wollen zuerst sehen, welche Bedingungen die Structur eines solchen Winkelmessers erfüllen und wie man denselben gebrauchen muß, wenn er die richtigen Winkel zwischen den Gegenständen geben soll. Nachher werden wir dann die nämliche Untersuchung in Rücksicht auf die Zenithaldistanzen vornehmen.

18) Die Ebene des Winkelmessers ist hier ein eingetheilter Kreis; um sein Centrum bewegt sich ein Fernrohr, dessen optische Achse die Visirlinie bildet. Das Fernrohr steht in Verbindung mit einer entweder ganz oder auch nur durch ihre Endpuncte

Digitized by Google

bezeichneten geraden Linie, welche durch das Centrum des Kreises geht und so den Rand des Linials einer Alhidade ersetzt *).

Die verschiedenen Stellungen, welche diese Linie einnimmt, bilden Centriwinkel, die den zu messenden Winkeln gleich seyn sollen.

Denken wir uns ein solcher Winkel sei BCA Fig. XI. Man stelle das Centrum des Winkelmessers in C und ziehe die Linien BC, CA. Ist dann das Instrument fehlerfrei, so muß der Centriwinkel, welcher durch den beweglichen Radius bestimmt wird, dem BCA gleich seyn.

Wenn die Projection der optischen Achse des Fernrohres auf die Ebene des Winkelmessers mit dem Rande des Linials einerlei wäre, wenn ferner die optische Achse selbst mit der Scheibe parallel liefe, so würden offenbar alle Bedingungen erfüllt seyn, damit der durch den Nullpunct des Verniers beschriebene Winkel dem gesuchten gleich wäre.

Allein in den meisten Instrumenten sind die Fernröhre excentrisch, das heißt, die Projectionen der Visirlinien auf die Kreisscheibe gehen nicht durch das Centrum derselben; ferner kann man auch ohne vorläufige Prüfung nie sicher seyn, daß die optische Achse mit der Ebene des Winkelmessers parallel laufe. Wir wollen daher unsere Untersuchung dahin leiten, daß wir finden, welche Irrthümer in den Winkeln durch die Excentricität des Fernrohres oder durch eine mit der Scheibe nicht parallele optische Achse hervorgebracht werden können.

19) Denken wir uns also FA sei die nach A gerichtete Visirlinie; aus A werde auf die verlängerte Ebene PQ ein Perpendikel AM gefällt; und F sei der Punct, wo die Visirlinie der Ebene PQ begegnet. Dann ist FM die Projection der optischen Achse und CM die Projection von CA auf die Ebene PQ; zieht man also aus C auf FM die senkrechte CH, so giebt diese die Excentricität des Fernrohres an. Die mit MA parallele HS ist die Entfernung der Mitte des Fernrohres von der Ebene des Kreises und folglich eine sehr kleine Linie von höchstens 1 Centimetre. Der Nullpunct des Nonius

*) Diese Linie, welche wir mit den Namen Rand des Linials, oder beweglicher Radius, bezeichnen werden, steht in Verbindung mit einem Vernier oder Nonius, dessen Nullpunct der Endpunct dieses beweglichen Radius ist.

Digitized by Google

sei R, mithin RI eine in allen Stellungen des Fernrohrs sich immer gleichbleibende Größe, weil das Fernrohr mit dem beweglichen Radius in fester Verbindung steht.

Wir wollen nun zuerst KR suchen.

Man nenne CH . . . e, den Winkel F . . . I, MC . . . D, RI . . . n, SH . . . d, CI . . . r, wo dann I, d, e, sehr kleine Größen seyn werden. Aus dieser Ursache kann man annehmen, daß $\sin CMH = \frac{e}{D}$ oder $CMH = \frac{e}{D \sin 1''}$ sei.

Ferner ist im Dreiecke CIM, $MC : CI = \sin(KCI + CMH) : \sin CMH$, oder $D : r = \sin\left(KI + \frac{e}{D \sin 1''}\right) : \frac{e}{D}$ oder $D : r = \sin KI + \frac{e}{D} \cos KI : \frac{e}{D}$, woher $r \sin KI + \frac{re}{D} \cos KI = e$ und $\sin KI = \frac{e}{r} - \frac{e}{D} \cos KI$.

Da $\frac{e}{D}$ immer sehr klein ist und KI, wo nicht klein, doch auch kein großer Bogen ist, so daß cos KI von 1 nicht um vieles verschieden seyn kann, so darf man gewiß $\frac{e}{D} \cos KI = \frac{e}{D}$ nehmen, woher dann $\sin KI = \frac{e}{r} - \frac{e}{D}$ wird *). Aus ganz analogen Gründen wird man, wenn ε der Winkel heißt, dessen sinus $\frac{e}{r}$ ist, $KI = \varepsilon - \frac{e}{D \sin 1''}$ finden. Zieht man von diesem KI den Werth von RI, welchen wir n genannt haben, ab, so wird $RK = \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''}$.

20) Denkt man sich nun, daß nach B visirt werde, so wird man daselbst ein R'K' wie hier ein RK erhalten, und der Unterschied dieser beiden RK bildet die Differenz zwischen dem Winkel, welchen man auf dem Kreise liest und der Projection des Winkels ACB auf die Ebene des Kreises. Heißt also die projicirte Entfernung BC, D' und ist P die Projection des Winkels ACB auf die Kreisscheibe, und RR' der gelesene Bogen, so hat man

$$P = RR' - RK + R'K' = RR' + \frac{e}{D \sin 1''} - \frac{e}{D' \sin 1''}.$$

*) Das Höchste was KI erreichen könnte wäre wohl 15°. In diesem Falle hätte man $\cos KI = 1 - 0{,}04$ und wenn man daher $\cos KI = 1$ setzt, so hat man nur um $0{,}04 \frac{e}{D}$ gefehlt, welches, da $\frac{e}{D}$ fast nie über Zehntheile von Secunden geht, nur auf die Tausendtheile der Secunden irgend einen Einfluß ausüben kann.

Digitized by Google

Nun kömmt noch die ſchiefe Lage der optiſchen Achſe in Betracht.

Zieht man durch H mit AF eine Parallele, ſo wird dieſe von AM ein Stück $= d$ abſchneiden. Man ſieht demnach leicht, daß $AM = D \tang I + d$ iſt, ſo daß $\tang ACM = \tang I + \frac{d}{D}$ wird; oder weil I ein ſehr kleiner Winkel und $\frac{d}{D}$ ein ſehr kleiner Bruch iſt, $ACM = I + \frac{d}{D \sin 1''}$. Ebenſo erhält man hinſichtlich auf B für den Winkel, den BC mit ſeiner Projection macht, $I + \frac{d}{D' \sin 1''}$. Wir können aber immer annehmen, daß $\frac{d}{D \sin 1''}$ gegen I klein ſei, und folglich für ACM und BCM' blos I ſchreiben, weil, wenn I nicht viel bedeutender als $\frac{d}{D \sin 1''}$ wäre, ſein Einfluß zu gering ſeyn würde, als daß wir ihn beachten müßten, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wir ſind hier im nämlichen Falle, wie wenn BCA mit Hülfe der Zenithaldiſtanzen I, I auf den Horizont reduzirt werden ſollte, und die Formel (71) oder (89, b) liefert uns ſogleich $P = BCA + I^2 \sin 1'' \tang \frac{1}{2}(BCA)$. Es wird alſo

$$BCA + I^2 \sin 1'' \tang \tfrac{1}{2}(BCA) = RR' + \frac{e}{D \sin 1''} - \frac{e}{D' \sin 1''},$$ woher endlich

$$BCA - RR' = \frac{e}{D \sin 1''} - \frac{e}{D' \sin 1''} - I^2 \sin \tang \tfrac{1}{2}(BCA).$$

Man ſieht hieraus, daß die Größe n keinen Einfluß auf den gemeſſenen Winkel ausübt. Die Correction $\frac{e}{D \sin 1''} = \frac{e}{D' \sin 1''}$, welche von der Excentricität des Fernrohres abhängt, kann leicht in Tabellen gebracht und berechnet werden. Man muß bemerken, daß es nicht gleichgültig iſt, wo die Linie e ſteht, das heißt, ob ſie, wenn der Beobachter ſich am Ocularglaſe befindet, dieſem zur Rechten oder zur Linken liege. Ebenſo muß man auch darauf Acht geben, in welchem Sinne der Kreis getheilt ſei, das heißt, ob man, wenn der Nullpunct des Verniers auf das Null der Kreiseintheilung geſetzt iſt, zur Linken oder zur Rechten das Fernrohr drehen müſſe, um der Ordnung der Grade nach auf der Kreislinie fortzuſchreiten. Alle dieſe Umſtände ſind jedoch in jedem einzelnen Inſtrumente unveränderlich, und können, wenn das Vorhergehende verſtanden iſt, leicht in der Rechnung in Betracht gezogen werden.

Digitized by Google

21) Ist das Fernrohr einmal excentrisch, so kann dieß nicht verändert werden, und man muß, wie oben gezeigt wurde, den Einfluß dieser Excentricität berechnen und den gemessenen Winkel davon corrigiren.

Allein der Parallelismus der optischen Achse läßt sich herstellen, wenn er nicht genau Statt haben sollte. Man bedient sich hierzu des sogenannten Probier-Fernrohres, welches folgendermaaßen eingerichtet ist.

Das Fernrohr AB Fig. XII. ist mit zwei parallelen Quadraten Q, Q', durch welche es geht, so verbunden, daß diese Quadrate, so viel als es in der Ausübung möglich ist, mit dem Rohre concentrisch sind. Die optische Achse des Fernrohres geht also in Folge dieser Construction beinahe durch die Centra der Quadrate. Um zu machen, daß dieses genau Statt finde, visire man mit dem Probier-Fernrohre nach irgend einem weit entlegenen Puncte; drehe dann dasselbe herum bis zwei andere Ecken der Quadrate an die nämliche gerade Linie zu liegen kommen, wo vorhin auch zwei Ecken lagen. Geht dann bei Wiederholung dieses Umdrehens die Visirlinie immer durch den nämlichen Punct, so ist die optische Achse des Probier-Fernrohres gehörig regulirt. Ist dieß nicht der Fall, so muß man dieselbe so lange rücken bis es genau eintrifft.

Hat man so das Probier-Fernrohr regulirt, so setze man es auf die Ebene des Winkelmessers. Neige und drehe diese Ebene so lange bis das Probier-Fernrohr auf irgend einen sehr weit entlegenen Punct zeigt. Man ist dann gewiß, daß die Ebene des Winkelmessers hinlänglich genau durch diesen Punct geht. Man bewege also die optische Achse des Fernrohres am Winkelmesser so lange bis sie durch den nämlichen Punct gehen kann, wie die des Probier-Fernrohres, so wird gewiß die Visirlinie des Winkelmessers mit der Scheibe desselben hinlänglich genau parallel laufen.

22) Von der Wiederholung der Winkel.

Denken wir uns einen Winkelmesser Fig. XIII. in solcher Stellung, daß die Visirlinie, welche auf A gerichtet war nun auf B zeige, und daß so der Centriwinkel ACB durch den Bogen mo bestimmt sei. Lassen wir das Fernrohr auf der Scheibe unbeweglich stehen, und drehen die Scheibe selbst so von m gegen o hin in ihrer Ebene herum, daß die Visirlinie noch einmal auf A gerichtet werde. Setze hierauf die Scheibe fest, und drehe das Fernrohr wieder bis es auf B zeigt; dann wird offenbar o in o' gekommen und das jetzige $mo' = 2mo$ seyn müssen.

Digitized by Google

Wiederholt man die nämliche Operation mehreremal, so kann am Ende jedes willkührlich große Vielfache des zu messenden Bogens abgezählt werden, und dieses giebt durch eine gehörige Division den einfachen Bogen.

Um zu sehen, wozu dieses dienen kann, wollen wir bemerken, daß der Kreis am Winkelmesser nicht mathematisch genau eingetheilt ist, und daß der Punct, wo das Null des Verniers steht, nicht mit unbegränzter Genauigkeit gelesen werden kann. Hierdurch begreift man, daß in der Bestimmung des Bogens, welcher von dem beweglichen Radius durchloffen worden ist, immer wahrscheinlich ein Irrthum geschieht. Allein zugleich sieht man ein, daß es keine Ursache giebt, warum dieser Irrthum bei einem großen Bogen bedeutender als bei einem kleinen seyn sollte.

Hat man also nach der obigen Methode das Vielfache, z. B. das 10fache eines Winkels gemessen, so weiß man gewiß, daß in dem hieraus geschlossenen einfachen Bogen nur der 10te Theil desjenigen Irrthums Statt haben kann, welcher beim Ablesen irgend eines Bogens begangen werden könnte. Man kann also durch die beschriebene Wiederholung der Winkel die Fehler der Eintheilung des Kreises und der Genauigkeit im Ablesen der Bogen bis zu jedem beliebigen Grade unschädlich machen.

23) Die Repetition der Winkel bringt auch noch andere Irrthümer, die zwar bei jedem einzelnen Visiren begangen werden können, aber von zufälligen Ursachen abhängen, außer merklichen Einfluß. Von dieser Art ist z. B. derjenige, welchem man dadurch ausgesetzt ist, daß man nicht immer mit der größten Genauigkeit den Punct, wo die Fäden sich kreuzen auf den gehörigen Punct des zu visirenden Signals setzt. Die Erfahrung lehrt, daß solche Irrthümer bald positiv bald negativ sind, so daß sie sich in einer großen Anzahl wiederholter Beobachtungen nicht häufen, sondern größtentheils compensiren, und folglich durch die Repetition, so wie oben erklärt worden ist, beliebig geschwächt werden können.

Hingegen würde man sehr irren, wenn man glauben wollte, daß irgend eine der durch die üble Stellung der optischen Achse des Fernrohres, oder der Scheibe des Winkelmessers, oder durch die Excentricität hervorgebrachten Abweichungen mit Hülfe der Repetition mehr oder weniger gehoben werden könnte. Denn diese Abweichungen sind alle darin gelegen, daß der auf der Ebene des Instrumentes gebildete Winkel von dem zu messenden verschieden sei, und zwar so, daß der Unterschied bei dem nämlichen Winkel und der nämlichen

Digitized by Google

Stellung der Ebene des Winkelmeſſers immer derſelbe bleibt, und ſich aus dieſer Urſache bei jeder Beobachtung wiederholt; ſo daß er am Ende genau ſo oft vorhanden iſt, als wie oft der Winkel repetirt wurde, mithin auch nach geſchehener Diviſion immer ebenſo groß bleibt, wie er es bei einer einzelnen Beobachtung geweſen ſeyn würde.

24) Man hat den Vortheil, welchen die Wiederholung der Winkel gewährt, beſonders dadurch vermehrt, daß man zwei Fernröhre an die Winkelmeſſer anbrachte, wovon das eine ſich auf der Scheibe und das andere ſich unter derſelben bewegt, ſo daß beim Herumdrehen keines das andere hindert.

Nur das obere Fernrohr iſt mit einem Linial-Rande und Vernier, welcher die Bogen auf dem eingetheilten Kreiſe angiebt, verſehen.

Nehmen wir nun an mit einem ſolchen Inſtrumente ſei der Winkel B C A Fig. XI. zu meſſen und zu repetiren.

1. Setze das Centrum der Scheibe über C.

2. Stelle den Nullpunct des Verniers, welcher, wie geſagt, mit dem obern Fernrohre in Verbindung ſteht, auf das Null der Kreiseintheilung und befeſtige das obere Fernrohr an die Scheibe.

3. Drehe und neige die Scheibe und bewege zugleich das untere Fernrohr ſo lange bis das noch immer unberührt gebliebene obere Fernrohr auf A und das untere auf B gerichtet iſt; ſchraube das untere Fernrohr feſt an die Scheibe.

4. Ohne die Fernröhre zu berühren drehe man die Scheibe in der Ebene, wo ſie ſich nun befindet, herum, bis das untere Fernrohr auf A gerichtet iſt. Schraube die Scheibe feſt und mache das obere Fernrohr frei. Dieſes, welches nun von A um den ganzen Winkel der beiden Fernröhre abweicht, führe man über die Scheibe zurück bis es auf B zeigt *).

25) Wäre nun kein Fernrohr excentriſch, und wären die beiden optiſchen Achſen vollkommen regulirt, ſo hätte offenbar der Nullpunct des Verniers auf der Kreis-Eintheilung einen Bogen durchlaufen, der das Doppelte des zu meſſenden Winkels

*) Alles Vorhergehende unterſtellt, daß der Kreis von der Linken zur Rechten eingetheilt ſei, das heißt, daß, wenn man die Scheibe vor ſich und das o zu ſich gekehrt denkt, die Eintheilung von der Linken zur Rechten numerirt ſei. Wenn der Kreis von der Rechten zur Linken numerirt wäre, ſo müßte mit dem Gegenſtande zur Linken ſo wie hier mit dem zur Rechten verfahren werden.

Digitized by Google

ausmachte; man könnte also diesen doppelten Bogen lesen und durch Division den einfachen finden.

Da aber eine solche Regelmäßigkeit des Instrumentes nicht vorausgesetzt werden kann, so wollen wir suchen, um wie viel bei excentrischen Fernröhren der gefundene Bogen von dem Doppelten des eigentlichen Bogens abweicht *).

Hierzu können wir, da das untere Fernrohr mit keinem Linial-Rande in Verbindung steht, uns einen solchen in jeder beliebigen Stellung denken und z. B. annehmen, daß er genau die Projection der optischen Achse dieses Fernrohres auf die Ebene des Kreises sei; dann wird für das untere Fernrohr $n = o$ seyn (19). Die Excentricität desselben heiße e'.

Betrachten wir nun die Fernröhre in ihrer Stellung nach der Operation 3. (24) und nenne R den Punct, wo der Linial-Rand des obern Fernrohres auf dem Kreise steht, und r den Punct, wo das eingebildete Linial des untern Fernrohres den Kreis schneidet, so ist nach (19) R um $\varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''}$ von der Linie CA entfernt. Ebenso wird R von der Linie CB um $\varepsilon' - \frac{e'}{D' \sin 1''}$ abweichen, so, daß der zwischen den beiden Linialen enthaltene Bogen um $\varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''} - \varepsilon' + \frac{e'}{D' \sin 1''}$ von dem Winkel ACB verschieden ist.

Hat man nun die Operation 4. (24) gemacht, so ist aus den nämlichen Gründen wie eben der zwischen beiden Linialen enthaltene Bogen von dem Winkel ACB um $\varepsilon' - \frac{e'}{D \sin 1''} - \varepsilon + n + \frac{e}{D' \sin 1''}$ verschieden.

Da nun derjenige Bogen, welcher am Ende gelesen wird, die Summe der beiden vorhergehenden ist, so muß er von dem Doppelten des Winkels ACB um die Summe der eben berechneten beiden Unterschiede, nämlich um $\frac{e + e'}{D' \sin 1''} - \frac{e + e'}{D \sin 1''}$ abweichen.

Hieraus folgt, daß der Einfluß der Excentricitäten auf den einfachen Winkel $= \frac{e + e'}{2 D' \sin 1''} - \frac{e + e'}{2 D \sin 1''}$ ist.

---

*) Wir nehmen hier an, daß die optischen Achsen regulirt seien, welches man immer thun muß wie (21) beschrieben wurde.

Digitized by Google

Anmerkung. Die vorhergehende Rechnung unterstellt, daß die Excentricitäten beider Fernröhre nach der nämlichen Seite hin liegen; wäre dieses anders, so daß z. B. die eine dem Beobachter zur Rechten, die andere demselben zur Linken läge, so müßte man, wie die Theorie leicht zeigt, die eine positiv, die andere negativ machen. Sind also in diesem Falle beide Excentricitäten gleich groß, so ist die Correction immer $= o$

Die Formel, welche wir gefunden haben, dient um die Winkel von dem Einflusse excentrischer Fernröhre zu corrigiren, nur muß man wissen, ob die Correction zu addiren oder zu subtrahiren sei. Wenn die Structur des Instrumentes gegeben ist, so findet man dieß leicht durch unsere Theorie.

Fast in allen Wiederholungs-Kreisen ist die Excentricität des obern Fernrohres $= o$ und die ganze Correction reduzirt sich auf $\frac{e'}{2 D' \sin 1''} - \frac{e'}{2 D \sin 1''}$.

26) Will man das Vierfache eines Winkels finden, so lasse man das obere Fernrohr nach der Beobachtung des doppelten Winkels unberührt. Drehe aber die Scheibe bis dieses Fernrohr auf A zeigt und führe dann das untere Fernrohr auf B; schraube dieses fest an die Scheibe, und fahre hierauf fort wie in (24) 4. Dann wird am Ende zu dem schon abgeschnittenen doppelten Bogen noch ein doppelter gekommen seyn, und man hat also den vierfachen.

Fängt man die nämliche Operation wieder an wie eben, so erhält man den sechsfachen Winkel, und so kann man jedes beliebige Vielfache bilden.

27) Wir wollen dasjenige, was wir hier über die Messung der Winkel zwischen zwei Objecten, sei es der horizontalen Winkel, oder der Winkel in ihrer eigenen Ebene, sagen wollten, mit einigen Bemerkungen über das Aufstellen des Instrumentes und das Visiren der Signale schließen.

In (89, c) und später (210, Note), sodann (212) haben wir gezeigt, wie man in dem Falle, wo der Winkelmesser nicht an das Centrum der Stellung gesetzt werden kann, den gemessenen Winkel corrigiren muß. Hierzu sind aber zwei Elemente nothwendig, welche an den citirten Stellen unter den Namen d und y vorkommen.

Nun geschieht es öfters, daß bei Stellungen in oder bei Thürmen das Centrum der Stellung von der angenommenen Stellung her nicht sichtbar ist, so, daß weder y noch d auf die gewöhnliche Art bestimmt werden können.

Digitized by Google

Man hat verschiedene Mittel angegeben, um sich in diesem Falle zu helfen. Jedoch scheint das beste und allgemein anwendbarste zu seyn, den Platz, wo sich das Centrum der Stellung und der angenommene Standpunct befinden, in großem Maaßstabe aufzunehmen; es wird dann leicht seyn, auf diesem Plane das Centrum zu bezeichnen, und hierdurch d und y mit hinlänglicher Genauigkeit zu messen.

28) Es geschieht auch einigemal, daß man als Centrum der Stellung einen Punct wählt, welcher von ferne her nicht sichtbar ist, wie z. B. den Mittelpunct eines abgestumpften Thurmes. Soll dann der Winkel zwischen diesem Mittelpuncte und einem andern Gegenstande gemessen werden, so muß man sich helfen wie folgt:

Gesetzt es sei von A (Fig. XIV.) aus, der Winkel der Linie AL mit der Linie AC, welche nach dem Centrum eines runden Thurmes geht, zu bestimmen. Man visire sowohl nach dem einen Rand E als auch nach dem andern D und finde so die Winkel EAα, DAα, deren halbe Summe den Winkel CAα ausmacht.

Anmerkung. Bei einem wiederholenden Instrumente macht sich die Summe dieser Winkel von selbst, wie leicht einzusehen ist, wenn man wechselweise nach E und nach D visirt.

Ist der Thurm rechteckig (Fig. XV.), so sind im Allgemeinen die Linien, deren eine PA den Winkel BAD halbirt, und wovon die andere AM durch die Mitte der Diagonale BD, das heißt durch das Centrum des Thurmes geht, verschieden. Nimmt man daher die halbe Summe der beobachteten Winkel DAK, BAK für den zu findenden Winkel MAK, so begeht man einen Irrthum gleich MAP, welcher durch Rechnung gefunden und demnach corrigirt werden kann, wie Folgendes lehrt.

Man bemerke, daß die Entfernung des Punctes A von dem Thurme in Rücksicht auf die Dimensionen des letztern sehr groß ist. Fällt man daher ein Perpendikel DN auf BA, so kann man $AN = AD$, d. i. $BA - AD = BD \cos\alpha$ annehmen. Nun ist $BP : PD = BA : AD$, oder $BP - PD : PD = BA - AD : AD$, also

$2MP : PD = BD \cdot \cos\alpha : AD$, woher $2MP = \frac{PD \times BD \cos\alpha}{AD}$ und da PD durch die weit größere AD dividirt ist, kann man ohne merklichen Irrthum $\frac{PD}{AD} = \frac{MD}{AD} = \frac{BD}{2AD}$ setzen, woher $2MP = \frac{BD^2 \cdot \cos\alpha}{2 \cdot AD}$ wird. Nun ist aber in

Digitized by Google

dem Dreiecke MAP, $MP : MA = \sin MAP : \sin APD$, und da man hier wohl $MAP \sin 1'' = \sin MAP$, $APD = \alpha$ und $MA = AD$ schreiben darf, so ist endlich

$$MAP = \frac{BD^2 . \sin 2\alpha}{8 . AD^2 \sin 1''}.$$

Ist nun der Thurm einigermaßen weit entfernt, (der einzige Fall, wo man genöthigt wäre sein Centrum als Signal anzunehmen), so wird der Werth von MAP sehr klein seyn.

Setzen wir z. B. daß AD nur 4000 Meter und $BD = 10$ Meter sei, so ist das größte mögliche $MAP = \frac{100}{8 . 4000 . 4000 . \sin 1''} = 0'',26$ eine sehr unbedeutende Correction, welche in vielen Operationen vernachläßigt werden könnte. Fände man sie jedoch wichtig genug, so könnte man sie durch ohngefähre Kenntniß von α, AD und BD berechnen, und sie müßte zu der halben Summme der Winkel DAK, BAK addirt, oder von derselben abgezogen werden, je nachdem der Schenkel AK der kürzeren oder der längeren von den beiden Linien AD, AB, zunächst läge.

Andere mit dem vorhergehenden ähnliche Fälle, welche hier nicht vorgesehen sind, können auf eine analoge Weise behandelt werden.

29) Wir gehen nun zu der

Messung der Zenithaldistanzen

über. Im Allgemeinen wird eine Zenithaldistanz gemessen, indem die Scheibe des Winkelmessers in eine verticale Ebene, und zwar so gesetzt wird, daß der Radius, welcher durch das o der Eintheilung geht, vertical steht; wenn man dann mit dem Fernrohre nach irgend einem Puncte visirt, so schneidet die Projection der optischen Achse auf die Ebene des Winkelmessers von der eingetheilten Kreislinie einen von o an zu zählenden Bogen ab, welcher die verlangte Zenithaldistanz ist; dieß jedoch in der Voraussetzung, daß die optische Achse mit der Ebene des Winkelmessers parallel und nicht excentrisch sei.

Wir wollen also vor Allem suchen, welchen Einfluß die Unregelmäßigkeiten des Fernrohres auf den vom Winkelmesser gegebenen Werth der Zenithaldistanz haben.

30) Es sei AN Fig. XVI. die nach dem Gegenstande A gerichtete optische Achse des Fernrohres. N der Punct, wo sie verlängert der Ebene des Winkelmessers begegnet. AM sei ein Perpendikel auf diese Ebene, so daß MN und MC die Projection von

Digitized by Google

AN und AC auf die Kreis-Scheibe vorstellen. K sei der Nullpunct des mit dem Fernrohr verbundenen Verniers; CD die Excentricität der optischen Achse. 0,180° ist der vertical gestellte Durchmesser.

In diesem Zustande wird man auf dem Kreise die Zenithaldistanz OK lesen, da man den Winkel ACO finden sollte. Wir müssen also suchen, um wieviel OK und ACO von einander verschieden sind.

Nennt man hier die nämlichen Dinge wie in (19) auch mit denselben Buchstaben, so wird aus der dortigen Theorie hervorgehen, daß

$$LK = \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''} \text{ oder}$$

$$OK = OL - \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''} \text{ ist.}$$

Um nun OL mit ACO zu vergleichen, beschreibe man mit einem willkührlichen Radius zwischen den drei Linien CO, CA, CM, das sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$. Da man aus den nämlichen Gründen wie in (20) $ACM = I$ setzen kann, so ist in diesem Dreiecke $\alpha\beta = LO$, $\alpha\gamma = ACO$, $\beta\gamma = I$ und $\beta = 90^0$, mithin

$\cos(ACO) = \cos(LO) \cdot \cos I = \cos(LO) - \frac{I^2}{2} \cos(LO)$, folglich nach Obigem

$$OK = ACO + \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''} - \frac{I^2}{2} \sin 1'' \cot(LO).$$

31) In den geodätischen Operationen ist LO immer nahe an 90°, so daß $\cot(LO)$ eine sehr kleine Größe ist, woher es folgt, daß, wenn die optische Achse einigermaaßen regulirt ist, der Irrthum $\frac{I^2}{2} \sin 1'' \cot(LO)$ ganz unbedeutend seyn muß. (Ueber die Berichtigung der optischen Achse, siehe (21).)

Die fernere Abweichung $\varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''}$ ließe sich wohl für jeden Winkel corrigiren, wenn ε *) und n genau bekannt wären. Wenn das Instrument keinen ganzen Kreis hat,

---

*) ε ist zwar $\left(\text{arc. sin} = \frac{e}{r}\right)$; allein da e in Rücksicht auf r nicht sehr klein ist, so kann der Werth von e, welcher zur Bestimmung von $\frac{e}{D}$ hinlänglich genau ist, nicht ebenso zur Auffindung von $\frac{e}{r}$ gebraucht werden.

Digitized by Google

sondern nur einen Theil desselben, wie z. B. einen Quadranten, so kann man die Größe $\varepsilon - n$ nicht wohl anders als durch den Vergleich einer auf dem Instrumente gemessenen Zenithal-Distanz, mit ihrem aus einer andern Quelle bekannten wahren Werthe erhalten *), welches wegen der Veränderlichkeit der atmosphärischen Refraction doch noch immer ziemlich unsicher ist.

Wenn aber an dem Winkelmesser ein ganzer eingetheilter Kreis angebracht ist, welcher um eine verticale Linie und in einer verticalen Ebene gedreht werden kann, so läßt sich durch Wiederholung des zu messenden Winkels nicht nur der Einfluß von e und n gänzlich außer Wirkung bringen, sondern man kann auch die gesuchte Zenithal-Distanz mit möglichster Genauigkeit erhalten wie folgt:

32) (Wir unterstellen, die optische Achse sei regulirt, und abstrahiren von ihrer kleinen Entfernung vom Kreise, welche gar keinen Einfluß hat.)

Man setze den Nullpunct K (Fig. XVII.) des mit dem Fernrohre verbundenen Nonius auf das Null der Kreiseintheilung, stelle die Scheibe vertical und drehe sie so, daß die optische Achse AN des unberührt gebliebenen Fernrohres durch den Punct A geht, dessen Zenithaldistanz gemessen werden soll. Die Linie VI, welche das durchs Centrum gehende Senkblei bezeichnet, werde genau bemerkt. Dann ist nach (30)

$IK = z + \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''}$, wo z die zu messende Zenithaldistanz bedeutet.

Man stelle nun die Scheibe in ihrer Ebene fest, und drehe sie um die Verticale IV als Achse herum, bis sie einen Halbkreis beschrieben hat, so daß sie nun den Rand, welcher zu A gekehrt war, von A abkehrt. Dann wird die auf der Scheibe fest gebliebene optische Achse des Fernrohres in A'N' und K in K', wo nun auch des Kreises Null ist, stehen.

Drehe nun das losgeschraubte Fernrohr durch I gegen A hin, bis die optische Achse wieder auf A zeigt. Dann wird AN'' die Stellung der optischen Achse und K'' die Lage von K, nämlich vom Nullpuncte des Verniers, seyn. K hat also auf dem Kreise einen Bogen O'K'' durchlaufen, dessen Werth wir näher betrachten wollen. Er besteht aus

*) Wenn das ganze Instrument um eine verticale Linie gedreht werden kann, und die Scheibe sich auch in einer verticalen Ebene bewegen läßt, so ist ein Halbkreis hinreichend, um den Einfluß von e und n zu vermeiden, wie man aus dem folgenden Paragraphen einsehen wird.

Digitized by Google

$K'I = KI$ und aus $K''I$. KI ist wie oben gesagt $= z + \varepsilon - n - \frac{e}{D \sin 1''}$ Der zweite Theil $K''I$ muß einen eben solchen Werth haben, nur mit dem Unterschiede, daß e und n verschiedene Zeichen erhalten müssen; er ist also $z + n - \varepsilon + \frac{e}{D \sin 1''}$; mithin wird $O'K'' = KI + K''I = 2z$, das ist, genau die doppelte Zenithaldistanz seyn.

Will man, nachdem das Vorhergehende geschehen ist, die vierfache Zenithaldistanz haben, so drehe man die Scheibe um IV, bis die Seite, auf welcher das Fernrohr ist, wieder dahin kömmt, wo sie anfangs war. Lasse das Fernrohr unberührt, und drehe die Scheibe in ihrer Ebene bis das Fernrohr auf A zeigt. Dann ist alles wieder in dem Zustande, wo es vor dem ersten Umdrehen um IV war, nur wird der Nullpunct des Verniers anstatt von Null auszugehen, jetzt schon von der in 2z enthaltenen Anzahl Grade ausgehen. Wiederholt man also die oben beschriebene Operation, so wird das Fernrohr am Ende zu dem schon durchlaufenen 2z offenbar noch 2z hinzufügen und so einen Bogen gleich 4z beschreiben.

Ebenso kann man nach Belieben 2z zusetzen und also Bogen von 2z, 4z, 6z, 8z... erhalten.

Anmerkung. Man muß bei der Messung einer Zenithaldistanz, so wie früher bei der Messung anderer Winkel, darauf bedacht seyn, daß das Fernrohr, wenn es gedreht wird, auf dem Kreise in dem Sinne laufe, wie die Nummern der Grade von Null an auf einander folgen; hierdurch wird bestimmt, ob man die Seite der Scheibe, worauf das Fernrohr *) befindlich ist, beim ersten Aufstellen des Instrumentes zu seiner Rechten oder zu seiner Linken nehmen müsse.

33) Die eben beschriebene Beobachtungs-Weise erfordert

1. daß die Scheibe des Kreises bei jeder Beobachtung eine verticale Ebene bilde, und daß

2. der nämliche Durchmesser, welcher das erste Mal vertical stand, es auch das zweite Mal werde.

---

*) Wir berücksichtigen hier nur das obere Fernrohr, das heißt dasjenige, welches auf der Seite der Scheibe, wo die Eintheilung ist, angebracht ist. Dieses allein wird hier zum Visiren gebraucht, wie aus allem Gesagten auch schon hinlänglich erhellt.

Digitized by Google

Um die erste Bedingung zu erfüllen, ist es hinreichend, wenn eine einzige Linie, welche in der Ebene der Scheibe liegt, vertical steht. Dieß wird mit Hülfe des Senkbleies erreicht; zwar kann der Faden desselben nicht an die Ebene des Kreises selbst gelegt werden, weil hierbei die Fernröhre hinderlich sind; allein man hilft dieser Schwierigkeit nicht nur ab, sondern erhält auch ein weit sichereres Verfahren, indem man an die Scheibe zwei hervorstehende und von der Ebene gleichweit entfernte Spitzen anbringt, deren Verbindungs-Linie gemäß dieser Construction mit der Ebene des Kreises parallel ist, und folglich die Richtung angiebt, die der Faden des Senkbleies haben muß, wenn die Scheibe vertical steht. Will man dieses also bewirken, so befestige man den Faden des Senkbleies an die obere Spitze und neige die Ebene des Winkelmessers so lange, bis der Faden genau durch die untere Spitze geht *).

34) Man hat wegen der Beschwerlichkeiten des Gebrauches eines Senkbleies, und der vorhin beschriebenen Spitzen, welche bei jeder Beobachtung aufgesetzt und abgenommen werden müßten, statt dieser Mittel eine röhrenförmige Wasserwage auf die Achse, um welche sich die Kreisscheibe bewegt, wenn sie in ihrer Ebene gedreht werden soll, unabänderlich befestigt, und ein für alle Mal auf dieser Wasserwage den Punct bestimmt, wo die Mitte der Blase stehen muß, wenn die Kreisscheibe vertical ist. Das Senkblei wird dann forthin unnöthig.

Anmerkung. Der nun beschriebenen Wasserwage werden wir in Zukunft den Namen Achsen-Wasserwage oder auch senkrechte Wasserwage geben.

35) Um auch die zweite Bedingung (33) zu erfüllen, das heißt um zu machen, daß immer der nämliche Durchmesser IV Fig. XVII. vertical bleibe, bedient man sich ebenfalls einer Wasserwage, welche mit der Scheibe ohngefähr parallel läuft und auf das untere Fernrohr angebracht wird, so daß sie mit diesem um das Centrum gedreht werden kann **). Der Gebrauch dieser Wasserwage, welche wir künftig die parallele Wasserwage nennen wollen, ist folgender.

*) Ob die Spitzen selbst gut gearbeitet, das heißt genau gleichweit von der Ebene entfernt sind, erfährt man, wenn man nach Beendigung der obigen Operation die Kreisscheibe in ihrer Ebene herumdreht, und untersucht, ob auch dann der Faden des Senkbleies genau durch die untere Spitze geht, wenn man ihn an diejenige, welche jetzt die obere ist, befestigt. Hat eine Abweichung statt, so ist sie doppelt so viel, als der Unterschied der Längen der Spitzen. Dieser kann demnach corrigirt werden.

**) Das untere Fernrohr ist zwar hier zum Visiren unnöthig und bleibt selbst bei solchen Instrumenten, die

Digitized by Google

Wenn nach dem ersten Visiren (32) alles fest steht, wird die parallele Wasserwage ohngefähr horizontal gestellt, und die Puncte werden genau bemerkt, wohin sich die Blase stellt. Die Wasserwage wird dann fest geschraubt. Nachdem man nun die Scheibe um die Verticale gedreht hat **), wird sie so lange in ihrer Ebene geneigt, bis die parallele Wasserwage wieder denselben Stand einnimmt wie früher. Dann ist offenbar der nämliche Durchmesser wie vorhin horizontal, und folglich auch der nämliche vertical.

36) Nach dem Vorhergehenden bleibt uns nur noch die Untersuchung und Verbesserung einiger Irrthümer übrig, welche bei dem Gebrauche des, so wie nun beschrieben, eingerichteten Winkelmessers begangen werden können.

Wenn erstens die Wasserwage, welche mit der Scheibe parallel ist, nicht genau das zweitemal wie das erstemal steht, so affizirt die Abweichung derselben den Bogen, welchen das Fernrohr durchläuft, so, daß sie entweder ganz zu diesem Bogen addirt oder davon subtrahirt werden muß. Wenn man also den Gang der Wasserwage, so wie (14) gezeigt ist, erforscht hat, so kann man kleine Abweichungen derselben bei den Beobachtungen Statt finden lassen und sie nachher corrigiren, welches zur Schnelligkeit der Beobachtungen nicht wenig beiträgt und daher besonders bei astronomischen Beobachtungen wichtig ist.

37) Ebenso lassen sich auch die kleinen Abweichungen, welche die auf die Scheibe senkrechte Wasserwage (Achsen-Wasserwage) anzeigen könnte, durch Rechnung corrigiren. Diese Abweichungen bedeuten nämlich, daß die Scheibe nicht ganz vertical steht. Denkt man sich also in C Fig. XVIII. das Centrum der Scheibe, so wird der Durchmesser Cz', welcher nach der Anzeige der parallelen Wasserwage vertical seyn sollte, nun blos auf dem horizontalen Durchmesser senkrecht stehen, und folglich von der wahren Verticale Cz verschieden seyn, so daß zCz' die Abweichung der Achsen-Wasserwage anzeigt. Man wird also im gegenwärtigen Falle den Winkel $z'CA$ statt zCA messen.

Um den Unterschied dieser beiden zu bestimmen, nenne man $zCz' \ldots I$, $zCA \ldots z$, $z'CA \ldots z'$, und bedenke, daß die Ebene zCz' auf $z'CA$ senkrecht steht. Dann ist in dem aus A als Centrum beschriebenen sphärischen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$,

---

nur Zenithaldistanzen geben, ganz weg, wo sich dann auf der Rückseite der Scheibe blos die Wasserwage befindet.

**) Man kann immer annehmen, daß dieses geschehen sei, wenn man nach vollbrachter Umdrehung die Scheibe mit Hülfe der Achsen-Wasserwage vertical stellt.

Digitized by Google

$$\cos z = \cos z' \cos I = \cos z' - \frac{I^2}{2} \cos z', \text{ woher, wie gewöhnlich}$$

$$z = z' + \frac{I^2}{2} \cot z' \sin 1''.$$

Der Werth $\frac{I^2}{2} \cot z' \sin 1''$ ist immer positiv, wie auch immer I seyn möge, und er wird nur negativ, wenn $z' > 90^0$ ist. Man kann deßhalb leicht die Correction $\frac{I^2}{2} \cot z' \sin 1''$ anwenden, weil I durch die Wasserwage bestimmt wird, ohne daß man zu beachten brauche, nach welcher Seite hin sie abweicht.

Anmerkung. In geodätischen Operationen ist die Größe $\frac{I^2}{2} \cot z' \sin 1''$ immer sehr klein, weil z' nie weit von 90^0 abweicht.

38) Man pflegt die immerwährende Regulirung der Achsen-Wasserwage durch die Einrichtung des Instrumentes selbst zu vermeiden. Man begreift nämlich, daß, wenn die Kreisscheibe einmal vertical steht, und dann um eine verticale Linie gedreht wird, sie nothwendig vertical bleiben müsse. Aus dieser Ursache ist in den Winkelmessern, welche zur Wiederholung der Winkel dienen sollen, die Achse, um welche sich die Kreisscheibe mit ihren Fernröhren und Wasserwagen drehen soll, so eingerichtet, daß sie vertical gestellt werden könne. Hat man dieses wirklich gethan, und auch zugleich die Scheibe in eine verticale Ebene gebracht, so wird diese es bei jedem Umdrehen bleiben. Die Achsen-Wasserwage braucht dann nur einmal gerichtet zu werden.

Diese nämliche Wasserwage dient auch um die Achse vertical zu stellen. Man muß zu diesem Zwecke die Achse mit ihren Stellschrauben so richten, daß die Achsen-Wasserwage beim Umdrehen der Kreisscheibe immer denselben Standpunct beibehält.

Anmerkung. Wie im gegenwärtigen Paragraphen gesagt ist, dient diese Operation nur um Zeit und Mühe zu ersparen, sie ist aber keinesweges streng nöthig.

Ende des Anhanges.

Mainz,
gedruckt bei Florian Kupferberg.

Digitized by Google

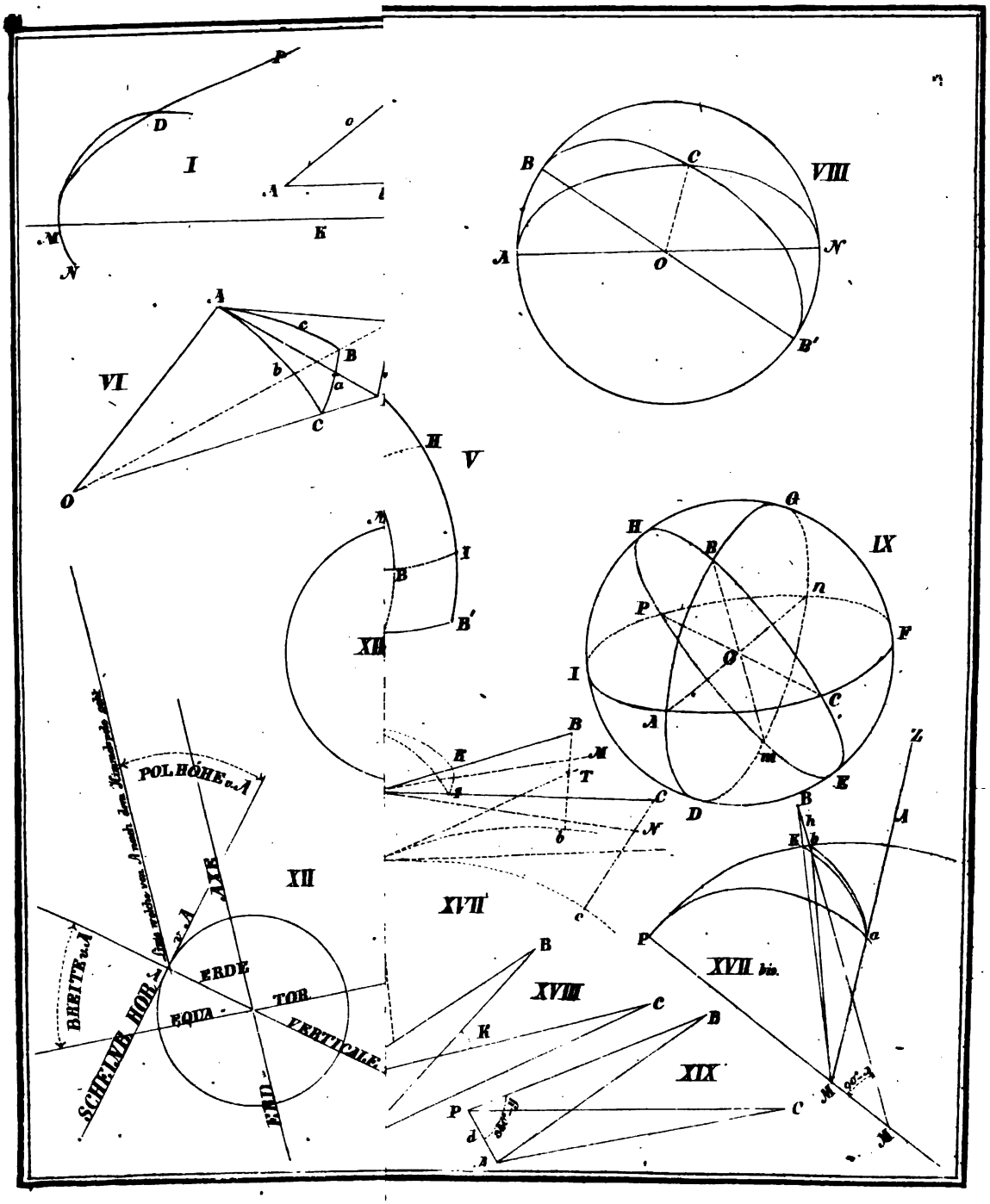
Druckfehler und Verbesserungen*).

Seite.	Zeile.	
22	1 v. o.	am Anfange füge man hinzu 41)
41	8 v. u.	statt α^2 lese man a^2
46	2 v. o.	statt P sin b lese man P^3 sin b
50	6 v. o.	statt dc . sin b cos a lese man dc , sin b cos A.
52	9 v. u.	statt Lehrsätze lese man Lehnsätze.
88	1 v. o	am Anfange füge man hinzu 104) . bis .
97	unten	statt 0,9007900 lese man 0,0007900.
104	5 v. o.	das (89) b) gehört in die folgende Zeile nach Horizont.
115	5 v. u.	für $\sin^2$ lese man $\sin^2 1'$.
121	18 v. o.	das (2) gehört in die folgende Zeile nach $\tan g^3 \psi \sin V$.
122	2 v. u.	statt sin 1′ lese man sin 1″
127	1 v. u.	statt cos ψ′ lese man cos ψ.
153	14 v. u.	für p . △ λ . $\sin^2 1''$ lese man p . △ λ . cos λ . $\sin^2 1''$
166	8 v. o.	statt beweißen lese man beweisen.
168	oben	ist falsch paginirt.
174	4 v. u.	statt: den Werth von φ cos λ′ lese man: den Werth φ cos λ′
179	12 v. o.	zwischen D cot δ und $\frac{D^2}{R}$ ($\cot^2 \delta + \frac{1}{2}$) setze ein +.
192	3 v. o.	statt $\log \frac{h}{h'} \left\{ \left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) \right\}$ lese man $\log \left\{ \frac{h}{h'} \left(1 + \frac{T - T'}{5412}\right) \right\}$
192	ibid.	statt 0,0002837 lese man 0,002837.
197	unten	Am Ende der vorläufigen Bemerkungen füge hinzu: 1) Wenn man alle Rechnungen, welche in den folgenden §§. angegeben sind, verrichten wollte, indem man die Erde sphärisch unterstellte, so könnte man noch immer unsere Formulare befolgen, allein man müßte alle Glieder, in deren Berechnung die Excentricität ε oder e^2 vorkömmt, gänzlich auslassen und an allen Orten, wo die Erdachsen a oder b in Rechnung gebracht sind, statt ihrer den mittleren Erde-Radius R schreiben. k.) Wenn man unsere Formulare mit den zur Erläuterung citirten Stellen des theoretischen Theiles vergleichen will, so muß man sich durch Veränderungen in den Buchstaben oder kleine Versetzungen in den Formeln nicht stören lassen.
199	16 v. o.	für $\bar{d}$ lese man d.
216	1 v. u.	statt $\bar{0}''{,}0538$ lese man $-0''{,}0538$.
216	ibid.	statt sin W lese man sin 2 W.
220	7 v. o.	statt: 1tes Glied ist immer positiv, lese man: 1tes Gl. hat das Zeichen von cos V.
224	13 v. u.	statt: $(\mu + \xi)'$ lese man $(\mu + \xi)''$.
227	rechts	unter der ersten Accolade die zweite Zeile: statt log sin 1′, lese man $-\log \sin 1'$,
228	11 v. o.	gleich linker Hand; statt 1ter Theil lese man 3ter Theil.
248	unten	statt $\alpha = 48°, \ldots$ lese man $\alpha = 47°, \ldots$

In der Fig. XVII setze man den Buchstaben s an das Ende der geraden Linie die von a ausgeht.
In der Fig. LXI lese man 90° − L′ für 90° − λ′.
In der Fig. LXV muß das δ ein A seyn.
Auf allen Figuren, wo z steht, lese man Z.

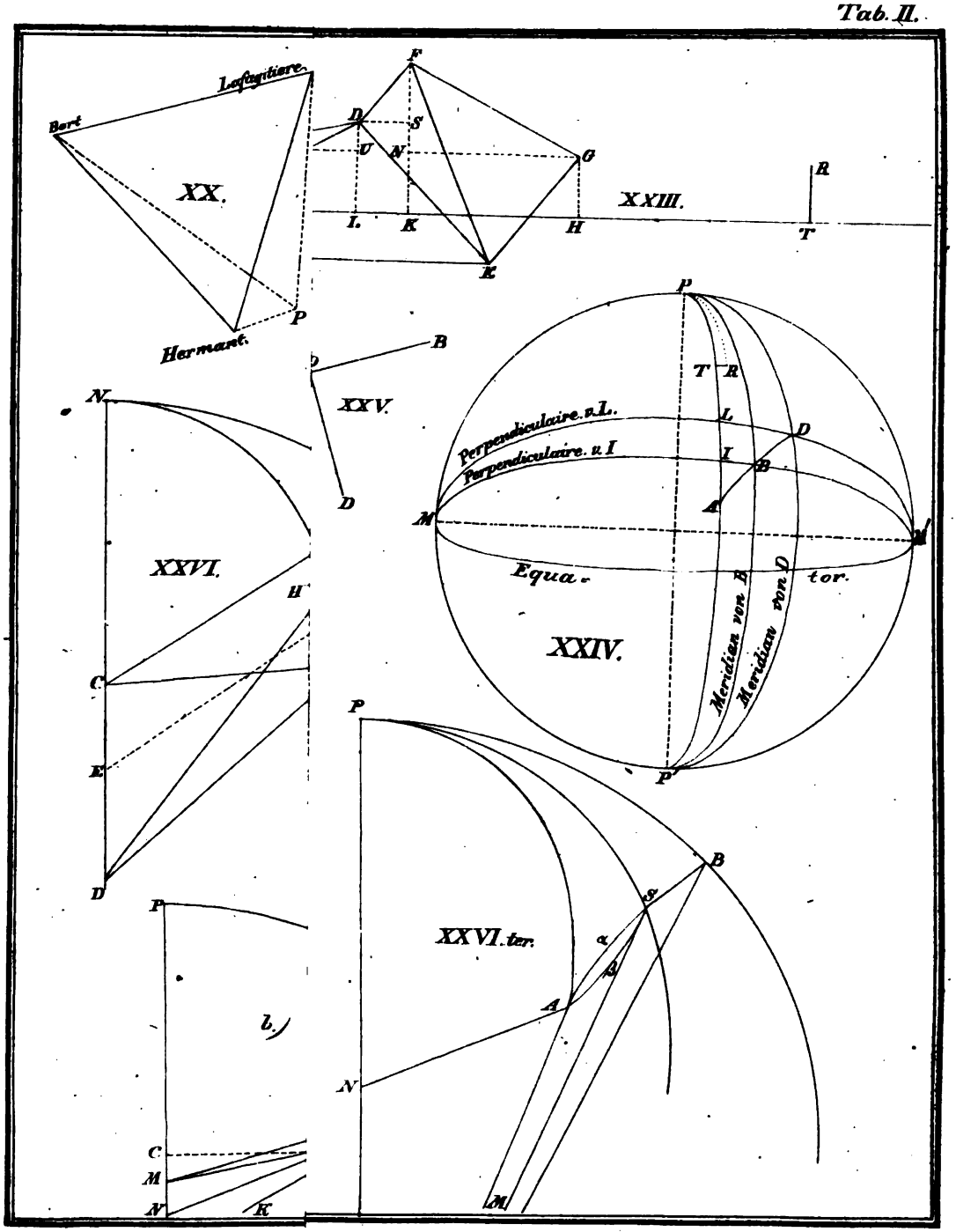
*) Es könnten wohl auffer den hier angegebenen Druckfehlern noch einige vorkommen; allein von der Correctheit der Endformeln und der Formulare im dritten Theile kann man überzeugt seyn.

Digitized by Google



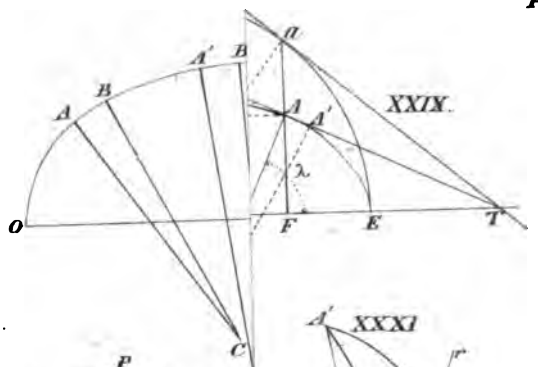
Digitized by Google

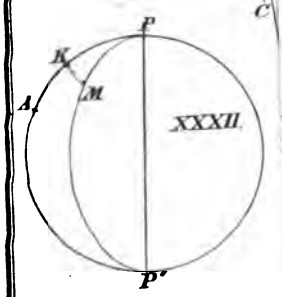
Digitized by Google

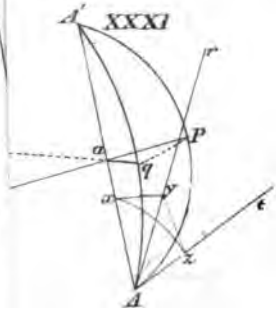


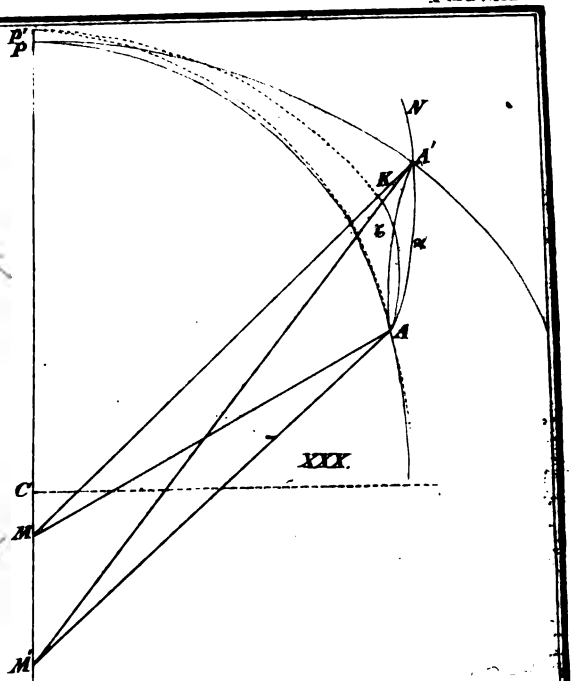
Digitized by Google

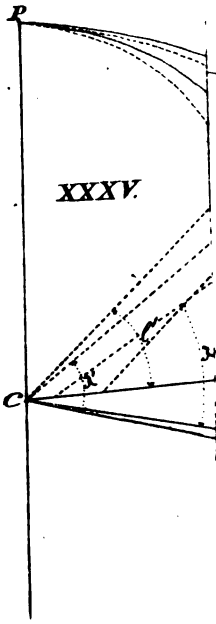
Digitized by Google

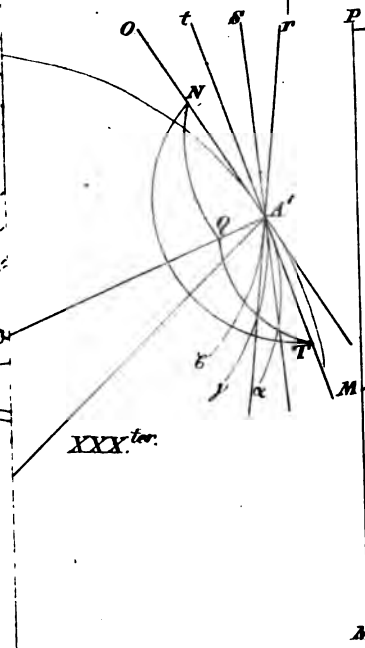


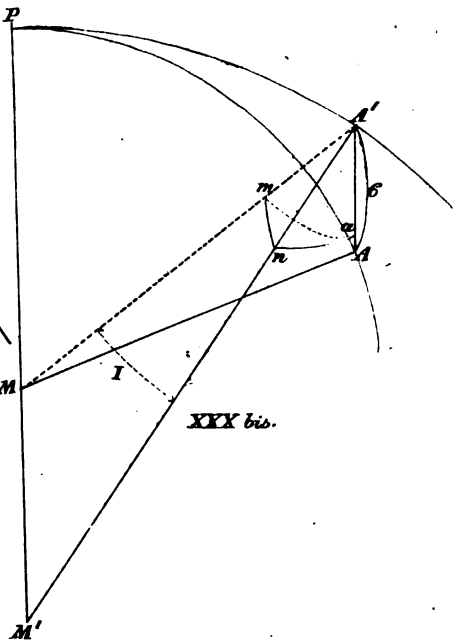






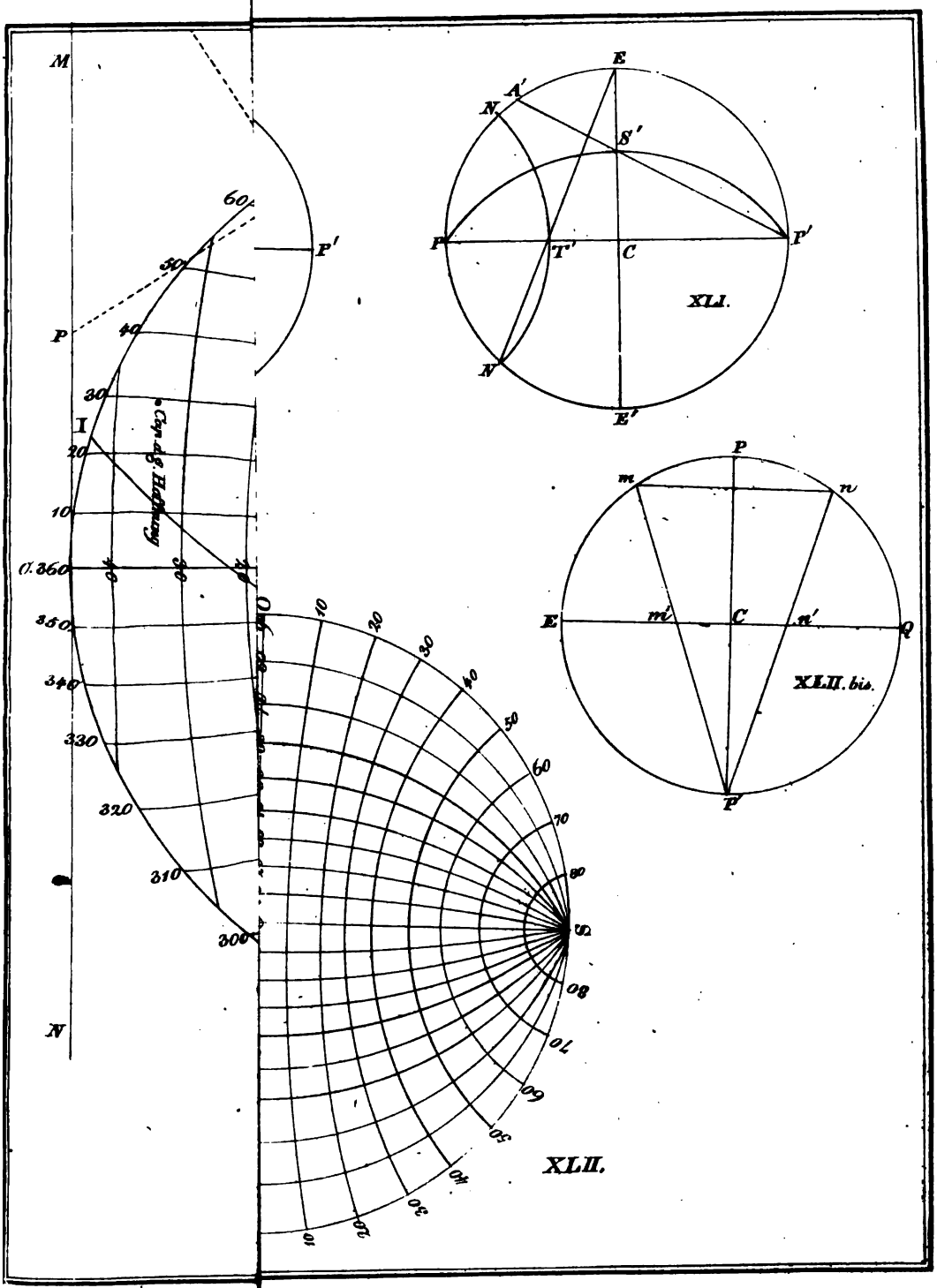






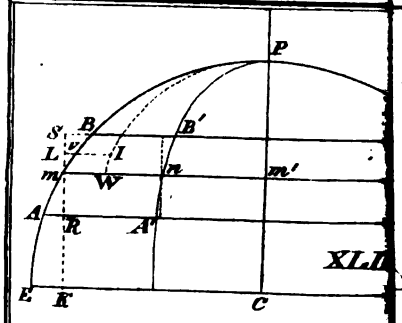
Digitized by Google

Digitized by Google

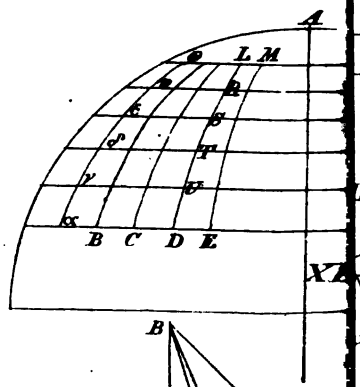


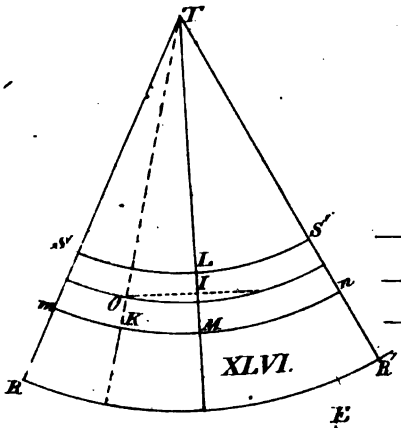
Digitized by Google

Digitized by Google

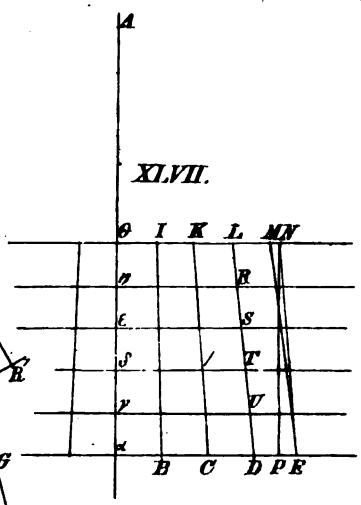


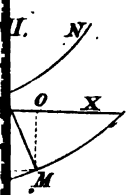
XLII.



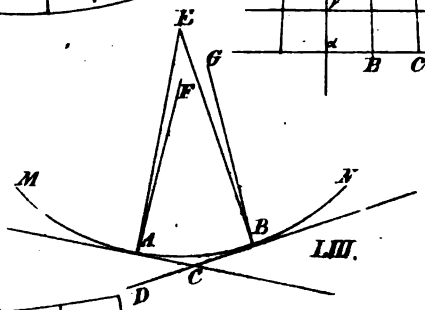


XLVI.

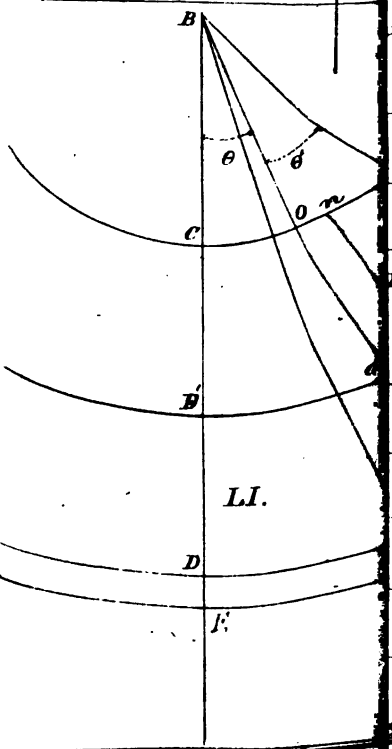




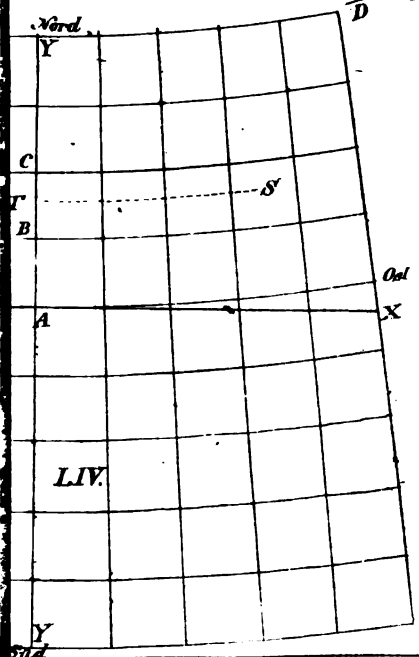
XLV.



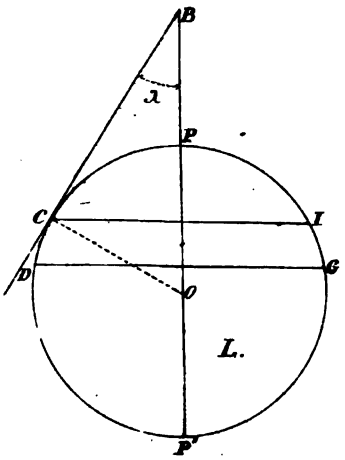
LIII.



LI.



LIV.

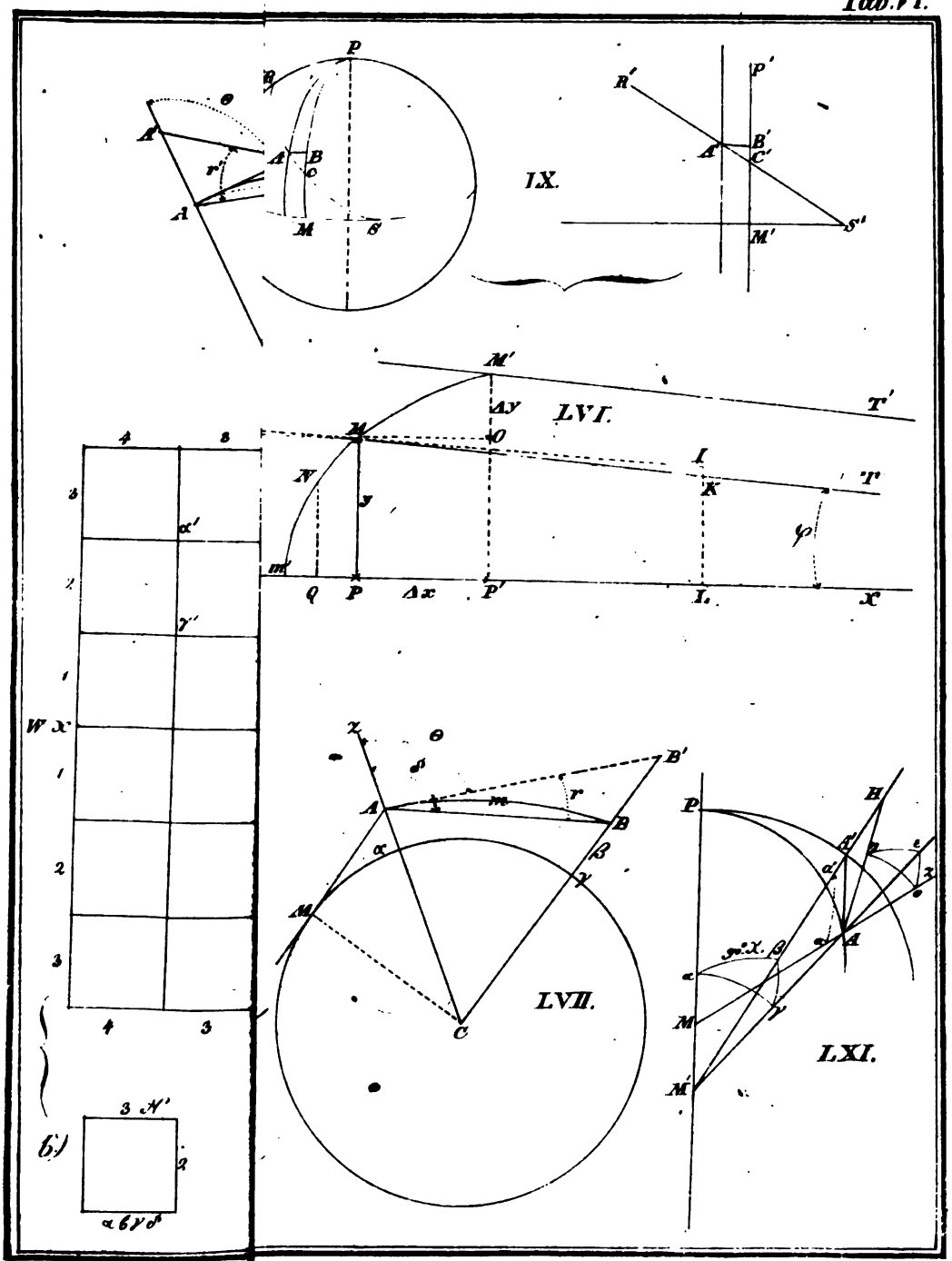


L.

Digitized by Google

Digitized by Google

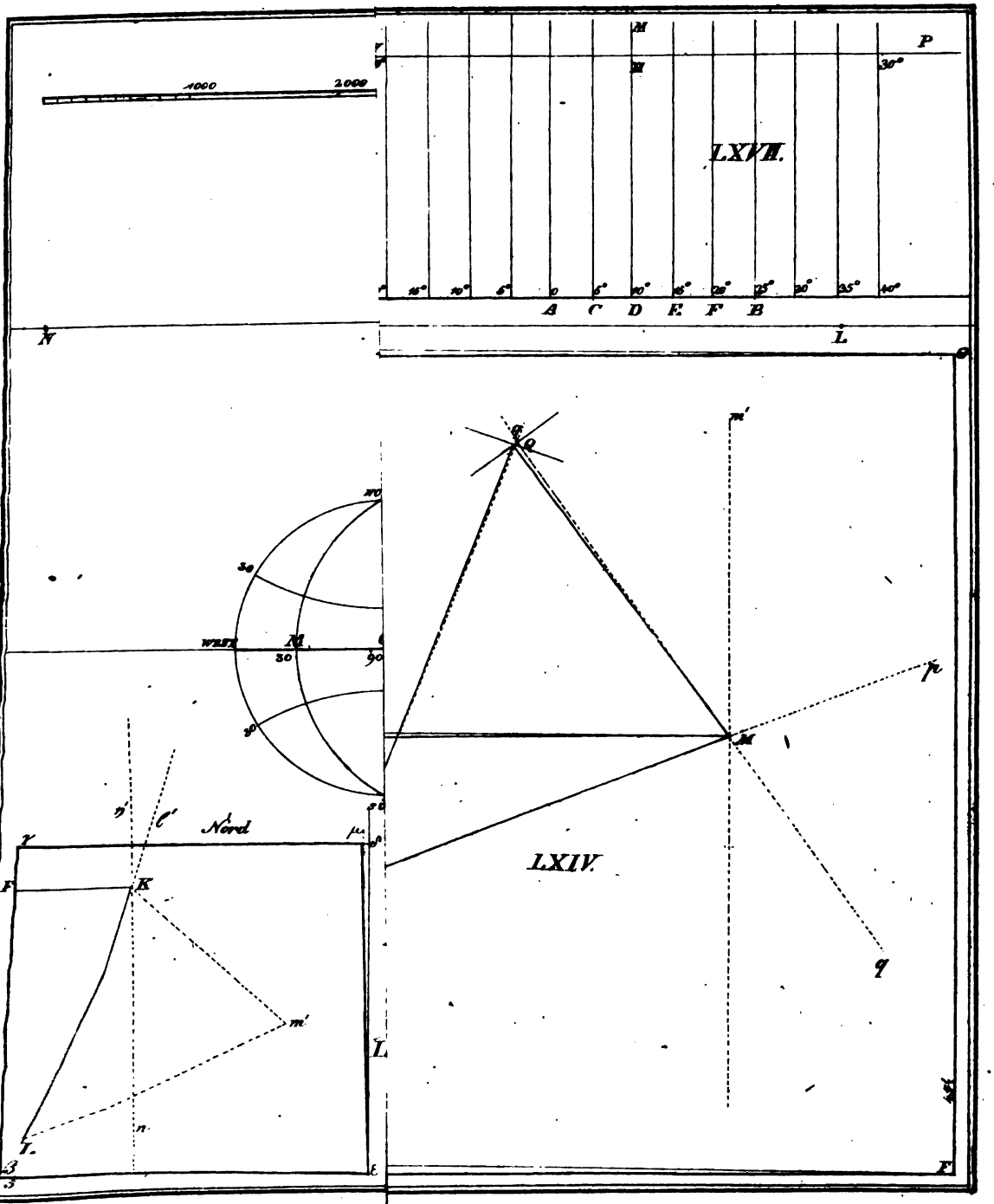
Tab. VI.



Digitized by Google

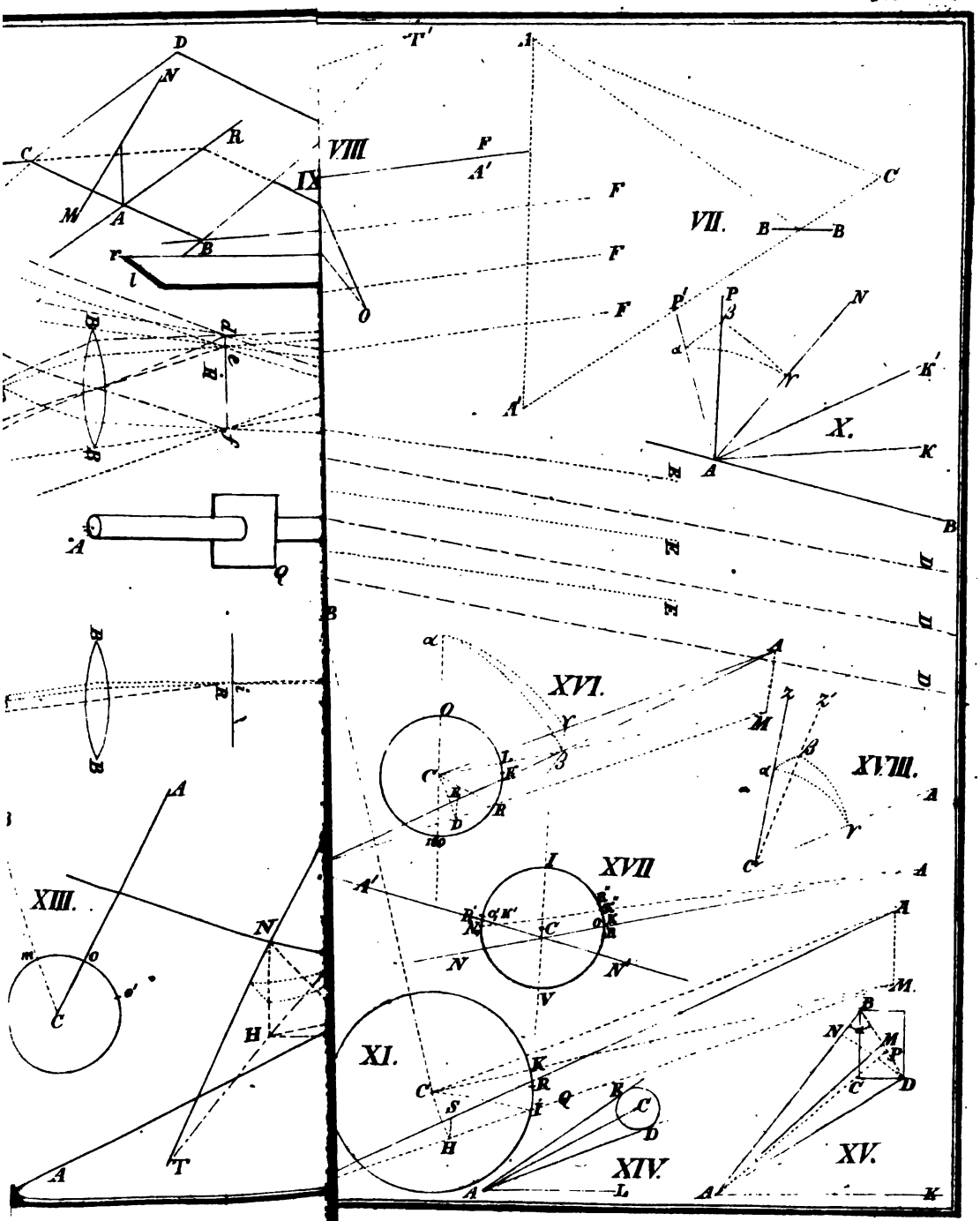
Digitized by Google

Tab. VII.



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google